Modifikation der Stokes-Funktion bei regionaler Quasigeoidbestimmung

Thomas Grombein, Kurt Seitz und Bernhard Heck

Wird die regionale Quasigeoidbestimmung im Konzept der spektralen Zerlegung durchgeführt, so ist die nach Molodenskii definierte Schwereanomalie in einen lang-, kurz- und mittelwelligen Anteil zu zerlegen. Die spektrale Zerlegung wird im Remove-Step auf die Schwereanomalie und im Restore-Step auf die zu bestimmende Höhenanomalie ζ angewendet. Der langwellige Anteil wird dabei durch ein Kugelfunktionsmodell dargestellt. Der kurzwellige Anteil wird der Topographie zugeordnet und durch das „Residual Terrain Modelling" (RTM) auf der Grundlage von digitalen Geländemodellen berechnet. Mit dem Ansatz des Remove-Compute-Restore können im Restore-Step konsistente lang- und kurzwellige Anteile des Störpotentials berechnet werden. Die somit erhaltenen mittelwelligen Schwereanomalien werden im Compute-Step (Feldtransformation) mittels Anwendung des Stokes-Integrals in den mittelwelligen Anteil an der Höhenanomalie umgerechnet.

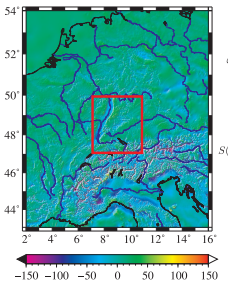
Da nicht über die gesamte Erdoberfläche integriert wird, ist die als Kernfunktion auftretende Stokes-Funktion $S(\psi)$ zu modifizieren, um den Abbruchfehler (Omission Error) zu minimieren. Die modifizierte Stokes-Funktion wird als Kernfunktion $K(\psi)$ bezeichnet. Der Integrationsradius Ψc ist an die regionale Ausdehnung des Integrationsbereichs σ_c anzupassen.

Schwereanomalie: $\Delta g = g_P - g_Q = \Delta g_{LW} + \Delta g_{MW} + \Delta g_{KW}$

Höhenanomalie: $\zeta = \zeta_{LW} + \zeta_{MW} + \zeta_{KW}$

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma_Q} \iint_{\sigma} \Delta g\, S(\psi)\, d\sigma$$

$$\zeta_{MW}(\psi_c)_K = \frac{R}{4\pi\gamma_Q} \iint_{\sigma_c} \Delta g_{MW}\, K(\psi)\, d\sigma$$



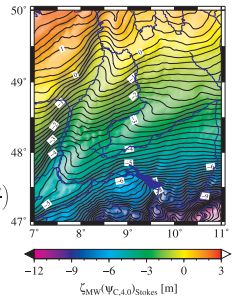
Feldtransformation Stokes-Integral

$$\zeta_{MW} = \frac{R}{4\pi\gamma_Q} \iint_{\sigma_c} \Delta g_{MW}\, S(\psi)\, d\sigma$$

Stokes-Funktion

$$S(\psi) = +1 + \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6\sin\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

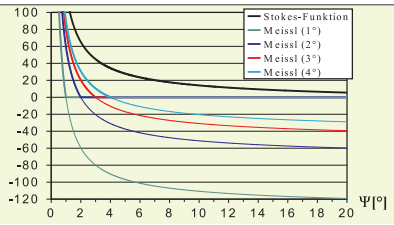
$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)$$



Meissl (1971)

- Integrationsradius Ψc wählen
- $K_M(\Psi)$ ist C_0-stetig

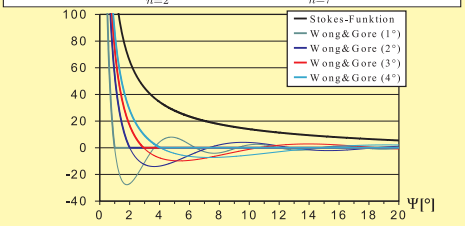
$$K_M(\psi) = S(\psi) - S(\psi_c); \quad 0 < \psi \le \psi_c$$



Wong&Gore (1969)

- Grad der Modifikation τ wählen
- Integrationsradius Ψc in der ersten Nullstelle der Kernfunktion
- $K_{WG}(\Psi)$ ist C_0-stetig

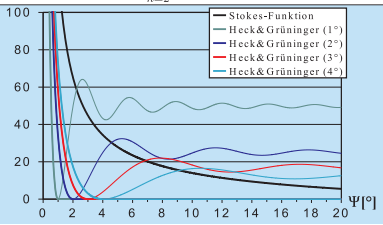
$$K_{WG}(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^{\tau-1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) = \sum_{n=\tau}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)$$



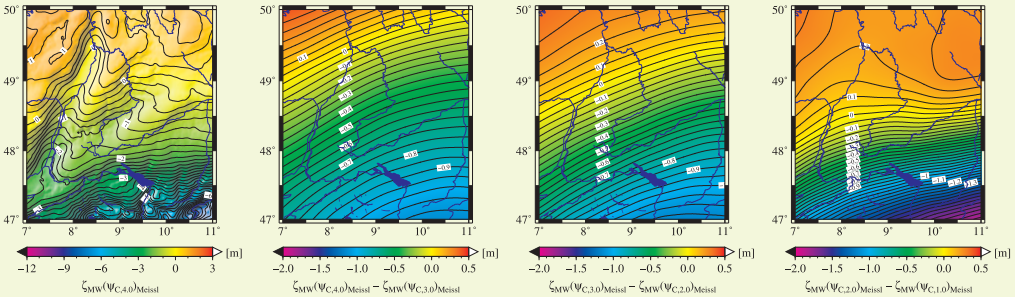
Heck&Grüninger (1987)

- Grad der Modifikation τ wählen
- Integrationsradius Ψc im ersten Minimum der Kernfunktion
- $K_{HG}(\Psi)$ ist C_1-stetig

$$K_{HG}(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^{\tau-1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) - K_{WG}(\psi_c)$$



Modifikation Meissl in Abhängigkeit vom Integrationsradius



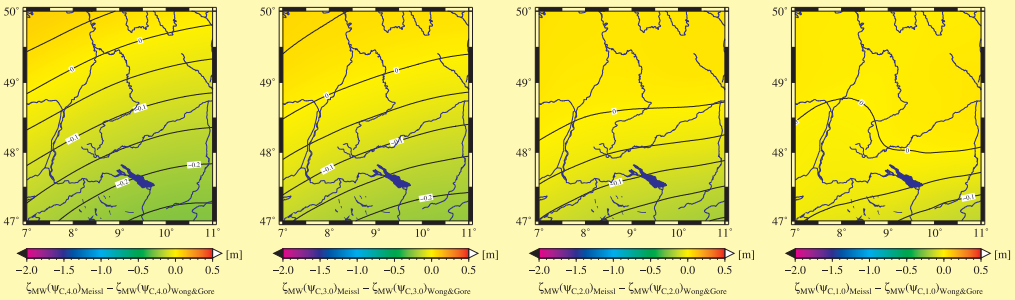
$\zeta_{MW}(\Psi c)_{Meissl}$ [m]

Ψc[°]	Min	Max	Mittel	L1	RMS	STD
0.997532	-4.094	0.618	-0.158	0.499	0.761	0.744
2.005800	-5.836	0.892	-0.421	0.890	1.329	1.260
2.931964	-6.980	1.105	-0.759	1.249	1.802	1.635
4.055708	-8.095	1.372	-1.213	1.646	2.313	1.970

Differenzen [m]

2.0 - 1.0	-1.873	0.338	-0.263	0.460	0.635	0.578
3.0 - 2.0	-1.180	0.356	-0.338	0.440	0.551	0.435
4.0 - 3.0	-1.139	0.413	-0.454	0.499	0.593	0.382

Differenz: Meissl - Wong&Gore



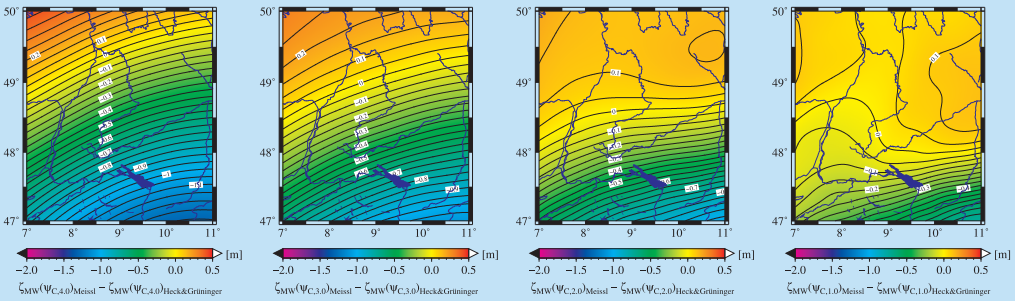
Differenzen [m]: Meissl - Wong&Gore

Ψc[°]	Min	Max	Mittel	L1	RMS	STD
0.997532	-0.146	0.026	-0.010	0.024	0.036	0.035
2.005799	-0.204	0.039	-0.031	0.052	0.071	0.064
2.987735	-0.235	0.065	-0.060	0.079	0.101	0.082
4.055708	-0.270	0.089	-0.095	0.108	0.132	0.091

Integrationsradius und Modifikationsgrad

Meissl Ψc[°]	Wong&Gore Ψc[°]	τ
0.997532	0.997532	64
2.005800	2.005800	32
2.931964	2.931964	22
4.055708	4.055708	16

Differenz: Meissl - Heck&Grüninger



Differenzen [m]: Meissl - Heck&Grüninger

Ψc[°]	Min	Max	Mittel	L1	RMS	STD
1.0	-0.747	0.130	-0.049	0.123	0.183	0.176
2.0	-1.027	0.193	-0.153	0.259	0.355	0.320
3.0	-1.095	0.301	-0.275	0.364	0.469	0.381
4.0	-1.310	0.429	-0.455	0.516	0.634	0.442

Integrationsradius und Modifikationsgrad

Meissl Ψc[°]	Heck&Grüninger Ψc[°]	τ
0.997532	0.999637	116
2.005800	2.004150	58
2.931964	2.987735	39
4.055708	4.028397	29

Fazit:

- Modifizierte Kernfunktionen $K(\psi)$ liefern signifikant unterschiedliche Beiträge zu den Höhenanomalien
- Mit wachsendem sphärischen Radius Ψc des Integrationsgebiets σc wachsen auch die Höhenanomalien systematisch an
- Differenzen bezüglich unterschiedlicher Kernfunktionen als auch Integrationsradien zeigen einen glatten, langwelligen Verlauf
- Durch Anwendung der modifizierten Molodenskii-Koeffizienten können langwellige Beiträge aus dem Fernbereich modelliert werden
- Eine endgültige Datumsgebung des Quasigeoidmodells erfolgt durch Anpassung über identische Punkte

Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Geodätisches Institut

GIK

Englerstraße 7
D-76128 Karlsruhe
www.gik.uni-karlsruhe.de
grotho@gik.uka.de