

Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor am Fallbeispiel der Satellitengradiometriemission GOCE

Thomas Grombein

Aufgabensteller: Prof. Dr.-Ing. Bernhard Heck

Betreuer: Dr.-Ing. Kurt Seitz

Mit der am 17. März 2009 gestarteten Satellitengradiometriemission GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) ist es erstmals möglich, zur Bestimmung des Erdschwerefeldes Gravitationsgradienten (zweite Ableitungen des Gravitationspotentials) in Satellitenhöhe zu messen. Durch die topographischen Erdmassen werden in den Gradienten hochfrequente Signalanteile, sogenannte topographische Effekte, induziert. Eine stabile Fortsetzung der Gradienten nach unten wird dadurch erschwert. Zur Glättung des Signals ist es daher sinnvoll, vor der Fortsetzung topographische Reduktionen an die gemessenen Gradienten anzubringen.

Die Bestimmung topographischer Effekte beruht auf der Auswertung von Funktionalen des Newton-Integrals, wobei im Fall von GOCE die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials zu bilden sind. Zur numerischen Berechnung ist eine Modellierung und Diskretisierung des gestellten Problems durchzuführen. Die Topographie wird hierzu in endlich große Massenkörper unterteilt und der Gesamteffekt durch die Summe der Beiträge dieser einzelnen Massenelemente berechnet. In ellipsoidischer bzw. sphärischer Approximation eignen sich vor allem Tesseroiden zur Modellierung (siehe Abb. 1).

Vor dem Hintergrund der Auswertung der GOCE-Gradienten in nahezu Echtzeit wurden im Rahmen dieser Diplomarbeit verschiedene Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor durchgeführt. Ausgangspunkt waren dabei bestehende Programmroutinen für die Massenmodellierung mittels Tesseroiden, die durch die Dissertation von F. Wild-Pfeiffer am Geodätischen Institut Karlsruhe vorlagen.

Nach einer Validierung und Optimierung der bestehenden Programmroutinen wurden zunächst einige theoretische Untersuchungen bezüglich der verwendeten Tesseroidformeln durchgeführt. Hierbei konnte im Gegensatz zur bisherigen Vorgehensweise ein alternativer Weg aufgezeigt werden, der zur Ableitung optimierter Tesseroidformeln geführt hat. Die Anzahl der notwendigen Integrationsauswertungen wird hierdurch von neun auf sechs verringert. Zudem hat sich die Formelstruktur wesentlich vereinfacht und kann in einer kompakten Index-Schreibweise angegeben werden. Eine in den ursprünglichen Formeln vorhandene Singularität konnte beseitigt und somit die numerische Stabilität erhöht werden.

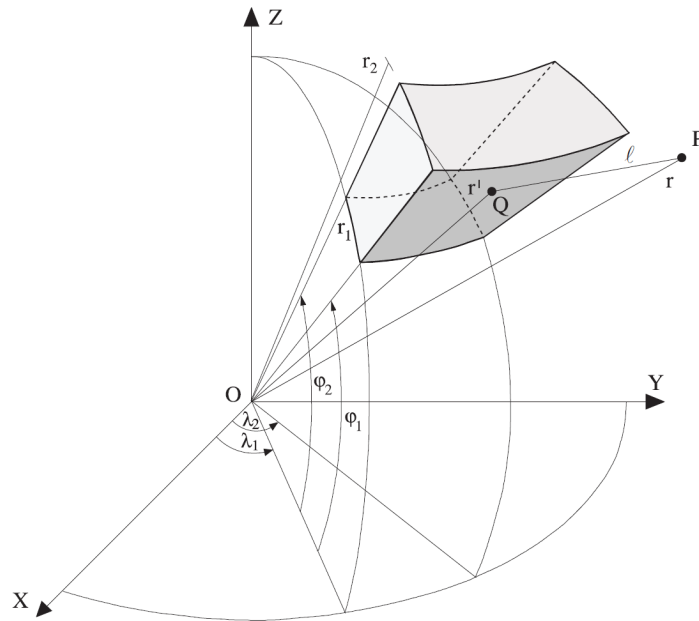


Abb. 1: Geometrie eines sphärischen Tesseroids

Da die auszuwertenden Integrale für den Fall des Tesseroids analytisch nicht lösbar sind, muss auf numerische Näherungsverfahren oder Approximationen zurückgegriffen werden. Hierzu wurden innerhalb der Arbeit verschiedene Verfahren vorgestellt und ausgehend von den optimierten Tesseroidformeln entsprechende Berechnungsformeln implementiert. Als Näherungsverfahren wurden die Taylor-Reihenentwicklung des Integranden und anschließende gliedweise Integration sowie die rein numerische Integration mittels Gauß-Legendre-Kubatur angewandt. Für den Fall der Gauß-Legendre-Kubatur wurden dabei drei Varianten mit einer, acht und 27 Stützstellen betrachtet. Unter der Annahme lokaler Massenerhaltung wurde als Approximation für Tesseroiden eine Modellierung mit Quadern und Punktmassen angewandt. Hierbei wurden für den Quader Auswerteverfahren mittels analytischer Berechnungsformeln und mittels Taylor-Reihenansatz umgesetzt.

Im Rahmen von numerischen Untersuchungen wurden die Berechnungsverfahren hinsichtlich ihrer erreichbaren Genauigkeit und Rechenzeit bei der Modellierung topographischer Effekte auf den Gradiententensor analysiert. Dies erfolgte für drei verschiedene Topographieauflösungen (5', 15' und 30').

Innerhalb der Genauigkeitsanalyse wurde deutlich, dass der durch die Modellierung entstehende Approximationsfehler stark von der Poldistanz des Berechnungspunktes abhängt. Die maximalen Fehlerwerte werden dabei für jedes Verfahren stets im Bereich des Pols erreicht und in Richtung des Äquators um einige Größenordnungen kleiner. Entsprechend der sich ergebenden Approximationsfehler wurden die Berechnungsverfahren in zwei Genauigkeitsklassen eingeteilt. In Abb. 2a sind für eine Topographieauflösung von 15' die Approximationsfehler für die Verfahren der Punktmassen-Approximation (*mpoint*), der Gauß-Legendre-Kubatur mit einer Stützstelle (*tess 3D 1*) und der Quader-Approximationen (*quad analy*, *quad taylor*) dargestellt. Abb. 2b zeigt entsprechende Ergebnisse für die Verfahren der Taylor-Reihenentwicklung (*tess taylor*) sowie die Gauß-Legendre-Kubatur mit acht und 27 Stützstellen

(*tess 3D 8*, *tess 3D 27*). Um eine ausreichende Genauigkeit bei der Modellierung zu gewährleisten, wurde in Abstimmung mit der bei GOCE erreichbaren Messgenauigkeit ein maximal zulässiger Approximationsfehler von 10^{-2} mE festgelegt. Für jedes Verfahren konnte genau ein Poldistanzwert ermittelt werden, ab der diese Genauigkeitsgrenze eingehalten wird.

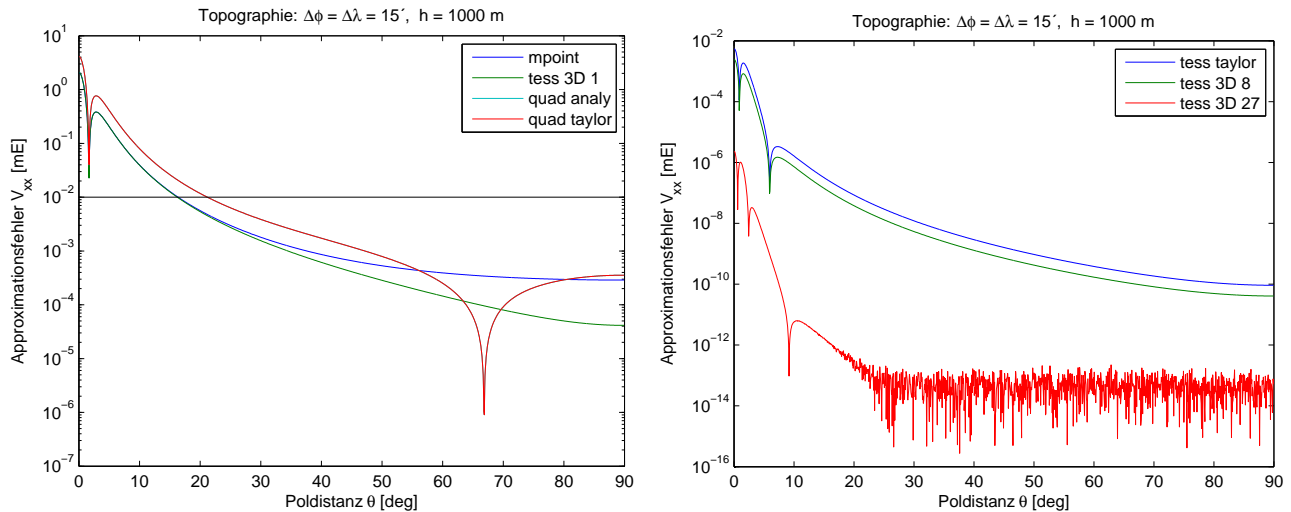


Abb. 2: Approximationsfehler der einzelnen Berechnungsverfahren

Durch den Vergleich der Rechenzeiten konnte gezeigt werden, dass Verfahren, die größere Approximationsfehler hervorrufen, tendenziell geringere Laufzeiten aufweisen, dadurch aber auch mit einer höheren Topographieauflösung berechnet werden können. Im Vergleich zu den ursprünglichen ProgrammROUTINEN konnten aufgrund der durchgeführten Optimierungen für alle Verfahren deutliche Reduktionen der Laufzeiten bewirkt werden. Die Rechenzeitersparnisse liegen dabei zwischen 49 % und 93 %.

Basierend auf den numerischen Untersuchungen dieser Arbeit wurde im Gegensatz zur klassischen Einteilung der topographischen Massen in einen Nah- und Fernbereich eine Modellierung in Abhängigkeit vom Poldistanzwert des Berechnungspunktes vorgeschlagen. Aus der Kombination von Poldistanz des Berechnungspunktes, geforderter Genauigkeit und Rechenzeit wurden hierzu Bedingungen abgeleitet, wann welches Berechnungsverfahren für eine effiziente Modellierung eingesetzt werden kann. Die ausgewählten Verfahren für den Anwendungsfall GOCE sind die Punktmassen-Approximation mit einer Topographieauflösung von $30'$ und $15'$ sowie die Taylor-Reihenentwicklung mit einer Topographieauflösung von $30'$.

Ergebnisse dieser Diplomarbeit wurden u.a. im Rahmen eines Vortrags auf der Geodätischen Woche 2009 in Karlsruhe präsentiert:

GROMBEIN T., SEITZ K., HECK B. (2009): Optimierte Tesseroidformeln zur Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor. Geodätische Woche 2009, 22.-24.09.2009, Karlsruhe.

Ausgewählte Literatur:

- GRÜNINGER W. (1990): Zur topographisch-isostatischen Reduktion der Schwere. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH).
- HECK B., SEITZ K. (2007): A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy*, 81, S. 121–136, DOI 10.1007/s00190-006-0094-0.
- HEISKANEN W.A., MORITZ H. (1967): *Physical Geodesy*. W.H. Freeman & Co., San Francisco.
- KUHN M. (2000): Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 520, München.
- MAKHLOOF A.A., ILK K-H. (2008): Effects of topographic–isostatic masses on gravitational functionals at the Earth’s surface and at airborne and satellite altitudes. *Journal of Geodesy*, 82, S. 93–111, DOI 10.1007/s00190-007-0159-8.
- RUMMEL R., GRUBER T., FLURY J., SCHLICHT A. (2009): ESA’s Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer GOCE. *ZfV - Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, 134, S. 125-130.
- TSCHERNING C.C. (1976): Computation of the second-order derivatives of the normal potential based on the representation by a Legendre Series. *manuscripta geodaetica*, 1, S. 71-92.
- WILD-PFEIFFER F. (2007): Auswirkungen topographisch-isostatischer Massen auf die Satellitengradiometrie. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 604, München.