

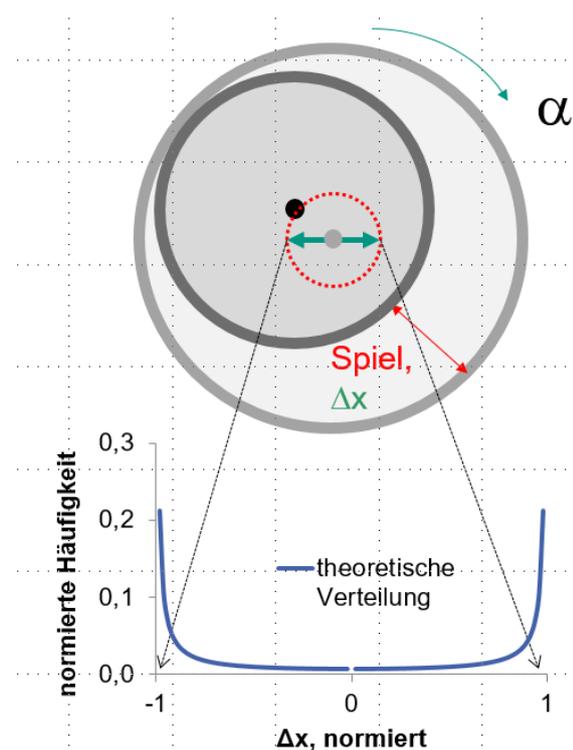
Anmerkungen zu Schwarz, W., Methoden zur Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM, Teil 1 und Teil 2

M. Hennes, Stand 13.1.2021

Da die beiden Beiträge [SCHWARZ, 2020ab] eine hervorragende Darstellung der Zusammenhänge und eine sehr ausführliche Beschreibung des Rechenganges enthalten, die sicher ihren Weg in die Praxis finden, folgen einige Anmerkungen, die zur Akzeptanz der beschriebenen Vorgehensweise beitragen sollen.

Typ-B-Beiträge an der Messunsicherheit sind nicht zwingend gleichverteilt!

Messunsicherheiten des Typs B bezeichnen solche Unsicherheiten, die nicht als Standardabweichungen aus empirischen Messreihen (Wiederholungen) abgeleitet werden. Seit langem häufen sich in der geodätischen Literatur nun die Beispiele, in denen den Typ-B-Unsicherheiten unterstellt wird, dass sie (immer) aus gleichverteilten Zufallsprozessen innerhalb eines festen Intervalls abzuleiten sind. Gleichverteilte Zufallsprozesse sind Prozesse, bei der die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Zwischenwertes innerhalb eines Digits für jeden Zwischenwert gleich groß ist (Quantisierungsfehler), beispielsweise Ablesungen einer Digitalanzeige. Damit ist dann auch schon das Vorkommen gleichverteilter Zufallsgrößen in der Geodäsie weitgehend erschöpft, auch wenn man beispielsweise vermuten könnte, dass das Spiel einer Zwangszentrierung (vereinfachte Vorstellung: einfacher Steckzapfen) ebenfalls zu einer Gleichverteilung führt, weil auf einem Durchmesser der Bohrung die Mittelpunkte des Zapfes innerhalb bestimmter Grenzen (dem Zentrierspiel) mit gleicher Wahrscheinlichkeit alle Positionen annehmen kann. Für die Fläche ist das auch richtig, auch noch, solange man lediglich einen einzigen



Durchmesser betrachtet. Betrachten wir aber „Koordinaten“, wird schnell klar, dass sich im mittleren Bereich der x-Koordinate eine Häufung ergibt, sobald wir auch eine Verschiebung des Zentrums in die y-Richtung erlauben, also die Gleichverteilung über die Fläche angenommen wird. Analoges gilt für die y-Koordinate. Diese Situation entsteht, wenn der Zapfen nicht an den Rand gedrückt wird, sondern beliebige Positionen einnehmen kann. Betrachtet man nun die Situation, bei der der Zapfen durch die Klemmschraube immer an eine Randposition gedrückt wird, ergibt sich zwar in Bezug auf den Umfang (Winkel) eine Gleichverteilung (die Ausrichtung der Schraube ist zufällig), in Bezug auf die Koordinaten aber eine Häufigkeit an den Rändern des Intervalls. Die zugehörige Standardunsicherheit lässt sich mit [SCHWARZ, 2020a, (4), Seite 73], berechnen, wobei für $f(x)$ die Kreisgeometrie berücksichtigt werden muss.

An diesem Beispiel wird anschaulich, dass sich aus dem – recht konkreten – Vorwissen über das Auftreten von Abweichungen Unsicherheitsbeiträge des Typs B für jede Koordinatenrichtung ergeben, die definitiv keiner Gleichverteilung unterliegen – auch wenn es gerne postuliert wird.

Obwohl nun einige – insbesondere geodätische – Beiträge für nicht-empirisch zu erhaltende Unsicherheitsbeiträge des Typs B empfehlen, eine Gleichverteilung zu unterstellen, ist diese Praxis nicht sachgerecht und kann zu falschen Ergebnissen führen. Vermutlich entstand diese Fehlinterpretation des GUM aufgrund der Beispiele in Abschnitt 4 der [ISO/IEC, 2008]. Diese wollen lediglich erklären, wie bei bekannter Wahrscheinlichkeitsdichte die zugehörige Standardabweichung berechnet wird. Hierfür wird der Einfachheit halber das Beispiel einer gleichverteilten Zufallsgröße gewählt. Abschnitt 3.3.5 des GUM statuiert aber klar, dass im Falle des Fehlens von empirischer/statistischer Informationen eine adäquate, vernünftig gewählte Verteilung(-sfunktion) bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ angenommen werden soll, um die Typ-B-Standardunsicherheit zu berechnen. Abschnitt 7.2.7 des GUM weist darauf hin, dass diese Annahmen dokumentiert werden müssen, (beispielsweise wie in [SCHWARZ, 2020a, Tabelle 4, S. 127]), um Nachvollziehbarkeit, Transparenz und evtl. auch Modifikation zu gewährleisten. Nur wenn die angenommene Wahrscheinlichkeitsdichte realitätsnah ist, führt die Berechnung der (kombinierten) Messunsicherheit zu realistischen bzw. realitätsnahen Ergebnissen. Es bleibt zu hoffen, dass die in der geodätischen Literatur häufig erfolgte Unterstellung der Gleichverteilung von Typ-B-Messunsicherheiten die hauptsächliche Ursache für die bisherige Inakzeptanz des GUM in der Geodäsie war, und dass sich die Hürde durch Anwendung von GUM-Abschnitt 3.3.5, also Berücksichtigung realitätsnaher Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, überwinden lässt.

Was ist nun zu empfehlen, wenn zwar klar erkennbar ist, dass ein Effekt eine nicht zu vernachlässigende Wirkung auf die Messgröße hat (und somit definitiv zu berücksichtigen ist!), aber die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion unbekannt ist? In der Regel wird zumindest das Ausmaß des Effektes bekannt sein. Wenn sich das Ausmaß eher durch scharfe Grenzen beschreiben lässt, ist meistens die Annahme einer Gleichverteilung innerhalb dieser Grenzen vernünftig. Sollte sich das Ausmaß nicht durch Grenzwerte beschreiben lassen, die nie überschritten werden, würde die Annahme einer Gauß-Verteilung (Normalverteilung) die Situation realistischer beschreiben. Damit soll definitiv nicht gesagt werden, dass die Verteilung exakt einer Gaußverteilung folgt, sondern lediglich erreicht werden, dass der Effekt seiner Natur nach mit vertretbarem Aufwand so vernünftig wie möglich berücksichtigt wird. Konkret treffen solche Überlegungen auf alle in [SCHWARZ, 2020ab] behandelten Typ-B-Unsicherheitsbeiträge zu, nämlich Refraktionskoeffizient, atmosphärische Korrektur, zyklischen Abweichungen und die Geoidundulation (Tabelle 4, S. 82 und im Zahlenbeispiel 2 ab S. 213 bzw. Abb. 19). Denn bei genauerer Überlegung ist es nicht einzusehen, warum alle genannten Beiträge innerhalb der angegebenen Grenzen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten und diese Grenzen nie überschreiten werden. Fachlich gesehen wären hier realistischere (Gauß-ähnlichere) Verteilungen anzusetzen, insbesondere beim Refraktionskoeffizienten, der nachweislich Werte im Bereich von -2 und +10 annehmen kann, typischerweise aber im bodennahen Bereich um den Wert 0,5 bis 1 schwankt. Wie auch immer, die Annahme von deutlich unterschiedlichen Verteilungen in den in [SCHWARZ, 2020] genannten Beispielen mag didaktischen Überlegungen geschuldet sein. Diese Beispiele zeigen auch das rasche Verschmelzen zu einer Normalverteilung [SCHWARZ, 2020b, Abb. 20, S. 214] und damit exemplarisch die Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes der Statistik. Entkräftet werden damit auch die Bedenken, die nach GUM erhaltenen Unsicherheiten nicht zu einer statistischen Analyse auf Basis einer Normalverteilung nutzen zu können. Diese statistische Analyse wird sogar realitätsnäher, weil Daten verwendet werden, die die auf den gesamten Messprozess einwirkenden Störungen so umfassend wie möglich abdecken.

Zur Monte-Carlo-Methode

In [SCHWARZ, 2020b] wird gezeigt, dass die Ermittlung von Standardabweichungen bzw. Standardunsicherheiten zu realistischeren Werten führt, wenn die Streuung der Zielgrößen mittels der Monte-Carlo-Methode berechnet werden. Natürlich gibt es auch elegante Methoden wie die Sensorfusion unter Nutzung diverser Filter, jedoch sind diese für den Anwender (noch) wenig bekannt und erst recht in der Praxis nicht zugänglich. Demgegenüber ist die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen ein vertrautes Werkzeug, das allerdings hinsichtlich der Fortpflanzung von a-priori-Varianzen zu wenig hinterfragt wird. Bereits [AWANGE et al, 2010] und [GRAFAREND, SCHAFFRIN, 1993] nutzen für die Genauigkeitsangabe der Zielgröße nicht den im Ausgleichungsprozess ermittelten geschätzten Wert $\hat{\sigma}_0$ sondern generell den a-priori-Wert σ im Endergebnis. Damit tragen sie der Tatsache Rechnung, dass durchaus zusätzliche – und damit zu berücksichtigende – Einflüsse, die mit σ beschreibbar sein, jedoch nicht durch Streuung der Beobachtungen realisiert werden, vorhanden sein können, während die ermittelte Standardabweichung $\hat{\sigma}_0$ lediglich die in den Residuen vorhandenen Abweichungen wiedergibt. Dass die in den Residuen vorhandenen Streuungen eine Situation unvollständig beschreiben, möge ein Beispiel zeigen: Die Abweichungen durch unsaubere Zentrierung über einem Punkt bleiben bei der Netzausgleichung meistens unberücksichtigt. Nur wenn die Messung bei unterschiedlichen Zentrierungen durchgeführt wird, wird dadurch die Streuung der Zentrierung auf die Residuen (der Richtungs- und Distanzbeobachtungen) übertragen. Nun könnte man versuchen, die Zentrierunsicherheit zu berücksichtigen, indem man den Punktkoordinaten in der Kovarianzmatrix entsprechend höhere Werte zuteilt. Dies ist jedoch nicht zielführend. Denn überdenkt man den gesamten Messprozess, wird man bei allen Beobachtungen zusätzliche Unsicherheitseinflüsse finden, die jedoch in dem Datensatz der Beobachtungen nicht als Streuung auftreten, sondern als eine einzige Realisierung. In [SCHWARZ, 2020ab] sind ausreichend Beispiele genannt. Bisherige Praxis ist, die Varianzen in der Kovarianzmatrix der Beobachtungen entsprechend zu erhöhen. Dadurch werden **alle** Werte in der Kovarianzmatrix größer. Nun berücksichtigt der Ausgleichungsprozess (leider!) lediglich die **relativen** Größenverhältnisse **innerhalb** der Kovarianzmatrix, aber nicht die eine allgemeine Erhöhung, beispielsweise durch den Faktor $\bar{\mu} = \frac{1}{\mu}$. Dies lässt sich einfach zeigen: Gegeben sei das Modell mit der Designmatrix \underline{A} , dem Unbekanntenvektor \underline{x} , den Beobachtungen \underline{l} und den Residuen \underline{r}

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{l} + \underline{r} \quad \text{mit } \underline{D}(\underline{l}) = \sigma^2 \underline{\bar{P}}^{-1} = \sigma^2 \mu \underline{\bar{P}}^{-1} \quad (1)$$

wobei $\underline{D}(\underline{l})$ als Dispersionsmatrix die a-priori-Varianz-Kovarianzmatrix enthält. Dann ergibt sich der Unbekanntenvektor $\hat{\underline{x}}$

$$\hat{\underline{x}} = (\underline{A}' \underline{P} \underline{A})^{-1} (\underline{A}' \underline{P} \underline{l})$$

mit der Faktorisierung

$$\underline{P} = \mu \underline{\bar{P}} \quad (2)$$

zu

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}} &= (\underline{A}' \mu \underline{\bar{P}} \underline{A})^{-1} (\underline{A}' \mu \underline{\bar{P}} \underline{l}) \\ &= (\underline{A}' \underline{\bar{P}} \underline{l})^{-1} (\underline{A}' \underline{\bar{P}} \underline{l}) \end{aligned} \quad (3)$$

wobei deutlich wird, dass das Ergebnis bei Veränderung der Kovarianzmatrix um einen Faktor μ (wobei die Gewichtsmatrix zu $\underline{\bar{P}}$ wird) unverändert bleibt. Mit anderen Worten: es wird immer

derselbe Unbekanntenvektor erhalten, egal, mit welchem Faktor die Kovarianzmatrix verändert wurde. Gleiches gilt für die Dispersionsmatrix $\underline{\hat{D}}(\hat{\underline{x}})$

$$\underline{\hat{D}}(\hat{\underline{x}}) = \hat{\sigma}_0^2 \underline{Q}_{xx} = \frac{\hat{\sigma}_0^2 \hat{\underline{P}} \hat{\underline{P}}}{\nu} (\underline{A}' \underline{P} \underline{A})^{-1}, \quad (4)$$

mit ν : Anzahl der Freiheitsgrade und $\hat{\underline{P}}$ gemäß (8)

wobei sie sich wegen

$$\underline{Q}_{xx} = (\underline{A}' \underline{\mu} \underline{P} \underline{A})^{-1} = (\underline{A}' \underline{P} \underline{A})^{-1} \quad (5)$$

und

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2 \hat{\underline{P}} \hat{\underline{P}}}{\nu} \underline{\mu} \quad ((\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2 \hat{\underline{P}} \hat{\underline{P}}}{\nu} \underline{\mu})) \quad (6)$$

$\underline{\hat{D}}(\hat{\underline{x}})$ unverändert als

$$\underline{\hat{D}}(\hat{\underline{x}}) = \frac{\hat{\sigma}_0^2 \hat{\underline{P}} \hat{\underline{P}}}{\nu} (\underline{A}' \underline{P} \underline{A})^{-1} \quad (7)$$

darstellt. Mit den gleichen Überlegungen lässt sich auch die Unabhängigkeit der Residuen \underline{r}

$$\hat{\underline{r}} = \underline{A} (\underline{A}' \underline{P} \underline{A})^{-1} (\underline{A}' \underline{P} \underline{l}) - \underline{l} \quad (8)$$

sowie der Dispersionsmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen

$$\underline{\hat{D}}(\hat{\underline{l}}) = \hat{\sigma}_0^2 \underline{A} (\underline{A}' \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}' \quad (9)$$

vom globalen Varianzfaktor $\bar{\mu} = \frac{1}{\mu}$ zeigen. Er schlägt sich lediglich in der geschätzten Varianz $\hat{\sigma}$ nieder. Das bedeutet, **alle** Ergebnisse (d.h. die unbekanntes Zielgrößen sowie ihre Standardabweichungen) sind unabhängig vom Faktor $\bar{\mu}$ und somit **unabhängig von einer globalen Vergrößerung** der Kovarianzen. Das Ausgleichungsergebnis berücksichtigt also lediglich Unsicherheitsanteile, die im Beobachtungsmaterial selbst als **Streuung** enthalten sind, und nicht jene, die nicht als Streuung enthalten sind.

Die Wirkung von zufälligen Abweichungen in Beobachtungen, die aber im Beobachtungsdatensatz unglücklicherweise nur in einer einzigen Stichprobe vorkommen, lässt sich nun durch Simulation in Form der in [SCHWARZ 2020b] beschriebenen Monte-Carlo-Methode ermitteln. Dieses Verfahren garantiert, dass derartige Effekte unter Berücksichtigung ihrer funktionalen Zusammenhänge im Hinblick auf die Zielgrößen einbezogen werden. Dies ist ein klarer Vorteil, der ein realitätsnäheres Ergebnis hervorbringt als die globale nachträgliche Kompensation durch die a-priori-Varianz σ . Da außerdem im Ausgleichungsprozess die Korrelationen mitberücksichtigt werden, werden diese natürlich auch die mittels der Monte-Carlo-Simulation erhaltenen Streuungen der Zielgrößen entsprechend beeinflussen. Somit bringt erst die Ergänzung der Ausgleichung durch eine Monte-Carlo-Simulation ein realitätsnahes Bild der tatsächlichen Verhältnisse. Das in [SCHWARZ, 2020b] gezeigte Beispiel der überbestimmten Neupunktbestimmung (mit einer Standardunsicherheit von etwa 1 mm) bestätigt die Überlegung, denn es ist nicht plausibel, dass die Neupunktkoordinaten mit einer Genauigkeit von etwa 0,5 mm erhalten werden (Ausgleichungsergebnis), wenn die a-priori-Abschätzung etwa 1 mm liefert.

Fazit

Letztendlich sind Modelle vereinfachte, aber möglichst realitätsnahe Abbilder der Wirklichkeit. Was nutzt also ein mathematisch perfektes Modell, wenn es nur einen Teil der Wirklichkeit abbildet? Warum also nicht die kleinen scheinbaren Unzulänglichkeiten von GUM akzeptieren, wenn das Vorgehen nach GUM eine realitätsnähere Vorstellung von der Wirklichkeit liefert als die fahrlässige

Vernachlässigung von Gegebenheiten (wie es durch die klassische Ausgleichsrechnung geschieht), nur, weil diese mathematisch nicht ganz so perfekt modellierbar sind wie andere?

Literatur

AWANGE, J.; GRAFAREND, E.; PALANCZ, B.; ZALETNYIK, P. [2010]: Algebraic Geodesy and Geoinformatics. Springer, Second Edition.

GRAFAREND, E.; SCHAFFRIN, B. [1993]: Ausgleichsrechnung in linearen Modellen. Wissenschaftsverlag.

ISO/IEC [2008]: ISO/IEC Guide 98-3:2008. Uncertainty of measurement -- Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995).

<http://www.iso.org/sites/JCGM/GUM/JCGM100/C045315e-html/C045315e.html?csnumber=50461>

SCHWARZ, W. [2020a]: Methoden zur Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM – Teil 1. AVN, S. 69-86.

SCHWARZ, W. [2020b]: Methoden zur Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM - Teil 2. AVN, S. 211-219.