

[https://gispoint.de/index.php?eID=tx\\_securedownloads&p=414&u=2&g=1%2C3%2C5%2C7&t=1587664308&hash=013a61327e21b19968fc5c2af071314598d94488&file=fileadmin/user\\_upload/Artikel\\_Archiv/Articles\\_PDF/avn/2020/S\\_69-86\\_Schwarz\\_avn\\_2\\_2020.pdf](https://gispoint.de/index.php?eID=tx_securedownloads&p=414&u=2&g=1%2C3%2C5%2C7&t=1587664308&hash=013a61327e21b19968fc5c2af071314598d94488&file=fileadmin/user_upload/Artikel_Archiv/Articles_PDF/avn/2020/S_69-86_Schwarz_avn_2_2020.pdf)

Stichwort: Messunsicherheit  
GUM  
Ordner: Messunsicherheit

# Methoden zur Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM – Teil 1

## Methods for the Determination of the Measurement Uncertainty Using GUM – Part 1

Willfried Schwarz

Es ist ein wichtiges Anliegen der Metrologie und damit auch der Ingenieurgeodäsie, zutreffende und richtige Genauigkeitsmaße für Messungen und daraus abgeleitete Größen zu bestimmen. Zumeist werden Genauigkeitsmaße aus den zufälligen Messabweichungen berechnet, die als Standardabweichungen bezeichnet werden. Dabei werden aber nicht erfasste systematische Messabweichungen nur unzureichend berücksichtigt. Hier will der GUM (**G**uide to the **U**ncertainty in **M**easurement) Abhilfe schaffen. In das Genauigkeitsmaß des GUM, die Messunsicherheit bzw. die Unsicherheit, fließen sowohl zufällige als auch nicht erfasste systematische Messabweichungen ein. Das Genauigkeitsmaß Messunsicherheit bzw. Unsicherheit ist somit realitätsnäher als andere Genauigkeitsmaße, die in der Praxis verwendet werden.

Mit dem GUM-Konzept werden die Messungen und die daraus abgeleiteten Größen nach einem einheitlichen Verfahren bewertet und dokumentiert. Die Bewertungen sind somit vergleichbar, transparent und interpretierbar. Genauigkeitsbewertungen mit GUM sind objektiver als andere Verfahren. Die GUM-Methode stellt eine Schnittstelle zwischen den Disziplinen her und reduziert die Gefahr von Fehlinterpretationen.

Aus diesen Gründen ist es unerlässlich, dass der GUM in der Geodäsie sowohl in der Lehre als auch in der Praxis mehr Beachtung erfährt. Bei aller Kritik am GUM ist es dennoch ein Verfahren, das eine Genauigkeitsbewertung nach einer festgelegten Methode durchführt, sodass für alle Beteiligten die Bewertungen transparent und nachvollziehbar werden. In diesem Beitrag werden die Ziele und Methoden des GUM dargestellt und an Zahlenbeispielen im Rahmen von Messunsicherheitsanalysen eingehend erläutert.

Aufgrund des Gesamtumfangs wird der Beitrag in zwei Teile aufgeteilt. Im ersten Teil, also in diesem Heft, wird die klassische GUM-Analyse vorgestellt, während in dem dann im nächsten Heft folgenden Teil das Verfahren der Messunsicherheitsbestimmung nach der Monte-Carlo-Methode und die Ermittlung von Messunsicherheiten bei Ausgleichsrechnungen vorgestellt werden.

**Schlüsselwörter:** Präzision, Genauigkeit, GUM, Messunsicherheit, erweiterte Messunsicherheit, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, systematische Messabweichungen, Messunsicherheitsanalyse, Monte-Carlo-Methode

*It is an important task of metrology and also of engineering geodesy to determine appropriate and correct accuracy measures for measurements and derived quantities. Values of accuracy are usually calculated from random measurement deviations, which are called standard deviations. Here, however, unrecognized systematic deviations are not taken into account sufficiently. In this matter the GUM (**G**uide to the **U**ncertainty in **M**easurement) can help. In the value of accuracy of the GUM, meaning the measurement uncertainty, random and unrecognized systematic deviations are taken into account together. The value of accuracy measurement uncertainty is therefore more realistic than other values of accuracy used in practice.*

*With the GUM concept the measurements and the derived values are evaluated and documented according to a uniform procedure. Therefore the evaluations are comparable, transparent and interpretable. The evaluations with GUM are more objective than other methods. The GUM method provides an interface between the disciplines and reduces the risk of misinterpretation.*

*For these reasons, it is essential that GUM receives more attention in geodesy, both in teaching and in practice. Despite of all criticism of the GUM, GUM is a procedure that carries out an accuracy assessment according to a defined method, so that the evaluations become transparent and comprehensible for all participants. This article describes the goals and methods of the GUM and explains numerical examples in detail as a part of a measurement uncertainty analysis.*

*Due to its size, the article is divided into two parts. In the first part, in this issue, the classic GUM analysis is carried out, while in the next part that follows in the next issue, the procedure for determining the measurement uncertainty according to the Monte Carlo method and the determination of the measurement uncertainties in adjustment calculations are presented.*

**Keywords:** Precision, accuracy, GUM, measurement uncertainty, advanced uncertainty, probability density functions, systematic errors, uncertainty analysis, Monte Carlo method

## 1 EINFÜHRUNG

In der Metrologie, also im Messwesen, gilt der Grundsatz, dass der Messwert einer Messgröße ohne Angabe seiner Genauigkeit wertlos ist. Dieser Grundsatz gilt auch in der Geodäsie, insbesondere für die Aufgabenstellungen in der Ingenieurgeodäsie. Es stellt sich aber die Frage, mit welchem Genauigkeitsmaß die Qualität der Messung bzw. der Messwerte bewertet werden soll. Bekanntermaßen können Genauigkeitsmaße aus den Abweichungen von Wiederholungsmessungen, die in der Statistik auch als Stichprobe bezeichnet werden, zu ihrem Mittelwert oder aus den Verbesserungen redundanter Messungen im Zuge von Ausgleichungen als Standardabweichungen berechnet werden. Diese Genauigkeitsmaße spiegeln aber oftmals nicht die tatsächliche Genauigkeit der Messgröße wider, da z. B. nicht erfasste systematische Messabweichungen gar nicht oder nur sehr unzureichend berücksichtigt werden. Wird z. B. eine Richtungsmessung entlang aufgeheizter Objekte ausgeführt, so wird der Visurstrahl aufgrund des Temperaturgradienten systematisch abgelenkt. Werden die Wiederholungsmessungen direkt nacheinander ausgeführt, sind alle Messungen mehr oder weniger in gleichem Maße verfälscht. Die systematischen Einflussgrößen sind in den Abweichungen der Messungen zu ihrem Mittelwert und damit auch in der daraus berechneten Standardabweichung nicht enthalten. Die Standardabweichungen sind zu optimistisch.

Anhand der *Abb. 1* wird dieser Sachverhalt an einer Zielscheibe verdeutlicht /DIN 55350-13:1987-07/ und /DIN 1319-1:1995-01, auch die Teile 3 und 4/. Obwohl versucht wird, das Zentrum der Zielscheibe zu treffen, befinden sich die Einschüsse, z. B. aufgrund einer Dejustierung der Zielvorrichtung, systematisch davon entfernt.

Der Abstand der Zählringe wird als Auflösung bezeichnet. Die Auflösung charakterisiert damit im Messwesen die kleinste Zählheit des Messwerts. Sie hat absolut nichts mit der Genauigkeit und der Präzision zu tun, die im Folgenden erklärt werden.

Die Streuung der Einschusslöcher untereinander ist ein Maß für die Wiederholgenauigkeit der Schießversuche, die auch als Präzision (engl. precision) bezeichnet wird. Die Präzision ist, bezogen auf

die Messtechnik, also ein Maß für die Übereinstimmung unabhängiger Messergebnisse unter stabilen Bedingungen. Liegen mehrere Messwerte dicht beieinander, so hat die Messmethode eine hohe Präzision. Das bedeutet aber noch nicht, dass die gemessenen Werte auch richtig sind, weil z. B. systematische Messabweichungen nicht berücksichtigt worden sind, die die Messungen verfälschen. Die Präzision sagt nichts darüber aus, wie gut die Messwerte mit dem wahren Wert der Messgröße übereinstimmen.

Die Richtigkeit ist ein Maß für die Übereinstimmung zwischen dem aus den Messwerten gebildeten Mittelwert und dem anerkannten Referenzwert (zumeist der wahre Wert). Wenn also der Mittelwert aus den Messungen gut mit dem wahren Wert übereinstimmt, ist die Richtigkeit hoch.

Demgegenüber ist die Genauigkeit (engl. accuracy) ein Maß für die Übereinstimmung zwischen den einzelnen Messergebnissen (im Beispiel die Positionen der Einschusslöcher) und dem wahren Wert (im Beispiel das Zentrum der Zielscheibe) der Messgröße. Eine hohe Qualität der Messungen lässt sich also nur erreichen, wenn

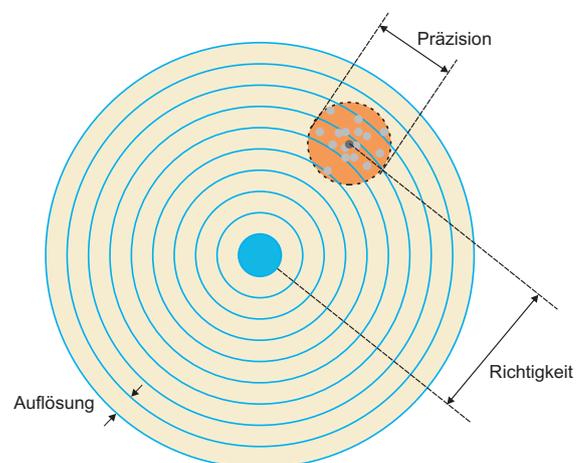


Abb. 1 | Auflösung, Genauigkeit, Präzision, Richtigkeit

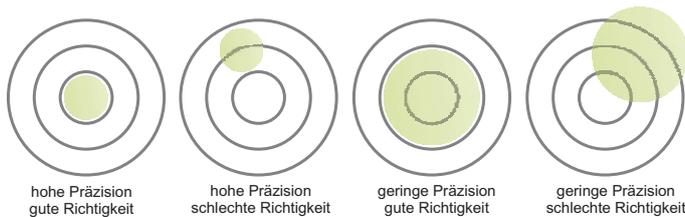


Abb. 2 | Präzision und Richtigkeit

sowohl die Präzision als auch die Richtigkeit gut sind. Fälschlicherweise wird oftmals im deutschsprachigen Raum die Genauigkeit mit der Präzision gleichgesetzt.

Abb. 2 verdeutlicht die verschiedenen Fälle, die sich aus diesen Definitionen ergeben. Es können beispielhaft folgende Aussagen zur Qualität von Messungen getroffen werden:

1. „Eine hochpräzise Messung kann äußerst ungenau sein.“ und
2. „Man kann präzise falsch messen.“

Zur Bestimmung zuverlässiger Genauigkeitsmaße will der „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)“ /DIN V ENV 13005:1999-06/, /ISO/IEC Guide 98-3:2008-09/ einen Beitrag leisten. Das Hauptanliegen des GUM ist es, neben den zufälligen Messabweichungen auch nicht durch eine Korrektur erfasste systematische Messabweichungen im Genauigkeitsmaß zu berücksichtigen. Natürlich kennt der GUM keine Methode, mit der die nicht erfassten systematischen Messabweichungen exakt quantifiziert werden können. Aber es wird hier (wenigstens) versucht, diese Messabweichungen mit anderen Informationen, wie z. B. anhand der Erfahrungen und des Sachverstands des Messingenieurs, abzuschätzen.

Pionierarbeit zur Entwicklung des GUM-Konzepts hat der Maschinenbau geleistet. Warum gerade der Maschinenbau? Die Gründe sind – wie so oft – wirtschaftliche. Je genauer die Produkte des Maschinenbaus hergestellt werden können, desto wirtschaftlicher kann man produzieren. Ein Beispiel soll den Sachverhalt verdeutlichen: Bei der Herstellung von Drähten darf ein definierter Mindestdurchmesser nicht unterschritten werden. Je genauer nun der Drahtdurchmesser direkt während des Ziehvorgangs bestimmt und damit das Drahtziehwerkzeug gesteuert werden kann, desto wirtschaftlicher ist der Produktionsprozess, weil die Größe des Sicherheitszuschlags für den Drahtdurchmesser so minimierbar ist. Es ist aufgrund des eingesparten Materials von großer wirtschaftlicher Bedeutung, ob der Drahtdurchmesser mit einer Toleranz von z. B. 0,1 mm oder von 1  $\mu$ m bestimmt werden kann. Der Toleranzwert, also der Sicherheitszuschlag, ist so festzulegen, dass der definierte Mindestdurchmesser des Drahts während des Ziehvorgangs zu keinem Zeitpunkt unterschritten wird. Bei der Festlegung des Toleranzwerts sind daher nicht nur die zufälligen Messabweichungen zu berücksichtigen, sondern insbesondere die dem Messprozess anhaftenden systematischen Abweichungen, sodass die Messwerte in Bezug zum wahren Wert der Messgröße auf jeden Fall innerhalb des Toleranzfelds liegen sollten. Das Problem dabei ist nur, dass sich systematische Messabweichungen einer direkten quantitativen Bewertung, anders als bei den zufälligen Messabweichungen, entziehen. Für die Bewertung der systematischen Messabweichungen

müssen daher spezielle Verfahrensweisen herangezogen werden, auf die in diesem Beitrag näher eingegangen wird.

Die Berücksichtigung der systematischen Messabweichungen im Genauigkeitsmaß hat im Maschinenbau zu einer erweiterten Betrachtungsweise bei der Bestimmung der Qualität von Messungen geführt, aus der sich dann letztlich der GUM entwickelt hat.

Die Anfänge des GUM reichen bis in das Jahr 1978 zurück /N.N. 2019/. Es gab bis dahin kein einheitliches Verfahren, statistische und nicht-statistische Einflussgrößen, z. B. systematische Messabweichungen, auf ein Messergebnis in einem geschlossenen Formalismus genauigkeitsmäßig zu bewerten. Der GUM wurde von einer Arbeitsgruppe der internationalen „Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM)“-Mitgliedsorganisationen (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP und OIML) entworfen und 1995 erstmals der Öffentlichkeit vorgestellt. Er wurde in den Folgejahren mehrmals überarbeitet. Vor diesem Hintergrund wurde der Begriff der Messunsicherheit bzw. Unsicherheit definiert und eingeführt. Teilweise wurden neue Methoden für den GUM zur Bestimmung der Messunsicherheit entwickelt. Die Messunsicherheit bzw. die Unsicherheit ist also ein GUM-spezifisches Genauigkeitsmaß und sollte daher nur in diesem Sinne verwendet werden. In Deutschland wurde der GUM 1998 als DIN-Entwurf /DIN V ENV 13005:1999-06/ eingebracht. Allerdings sah sich der GUM schon bald der Kritik ausgesetzt. Aus mathematischer Sicht ist es nämlich problematisch, nicht-statistische Größen genauigkeitsmäßig zu bewerten. Aufgrund der Einsprüche von mathematischer Seite wurde der DIN-Entwurf inzwischen zurückgezogen, weil keine Hoffnung besteht, dass dieser Entwurf eine DIN-Norm werden wird. Als Ersatz für diesen zurückgezogenen DIN-Entwurf /DIN V ENV 13005:1999-06/ wird die Norm ISO/IEC Guide 98-3:2008-09 angesehen. Weiterhin haben die Konzepte des GUM bereits Eingang in nationale und internationale Normen, wie z. B. in der /ISO 17123-1:2014/ gefunden. Die Prinzipien des GUM werden auch im Rahmen der Bestimmungen des Deutschen Kalibrierdiensts (DKD), z. B. bei der Akkreditierung von Kalibrier-Laboratorien, und der Eichgesetze in Deutschland für verbindlich erklärt, sodass der GUM auch darüber Eingang in die Praxis bekommt und an aktueller Bedeutung gewinnt /Pesch 2017/.

Aus diesen Gründen ist es unerlässlich, dass der GUM auch in der Geodäsie und dabei speziell im Bereich der Ingenieur-geodäsie als eine bedeutende Methode zur Ableitung zutreffender Qualitätsmaße eingeführt wird, zumal Geodäten als Sachwalter für Qualitätsbewertungen bei geometrischen Aufgabenstellungen, z. B. besonders im Bereich des Bauwesens, angesehen werden. Das im Jahr 2017 vom „DVW e. V. – Gesellschaft für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement“ herausgebrachte Merkblatt „Standardabweichung vs. Toleranz“ /Kuhlmann et al. 2017/ geht auf nicht erfasste systematische Messabweichungen aus Sicht des Verfassers nur unzureichend ein. Es wird daher empfohlen, das Merkblatt zukünftig dringend zu überarbeiten und die Ansätze des GUM zur Berücksichtigung nicht durch eine Korrektur erfasster systematischer Messabweichungen in die Qualitätsangaben der Messungen und der daraus abgeleiteten Parameter einzuarbeiten. Gerade systematische Messabweichungen spielen bei der Fest-

legung von besonders kleinen Toleranzvorgaben eine entscheidende Rolle.

Qualitätsfestlegungen nach GUM dienen zudem bei Genauigkeitsangaben als Schnittstelle zwischen den Projektbeteiligten und reduzieren dadurch die Gefahr von Fehlinterpretationen. In den Ausschreibungen der Wasser- und Schifffahrtsverwaltungen werden beispielsweise die zu erbringenden Qualitätsanforderungen an die auszuführenden Messungen bereits als Messunsicherheit nach GUM festgelegt. Erste Anregungen, den GUM für geodätische Belange zu verwenden, stammen u. a. von /Heister 2001, 2005/, /Hennes 2007/, /Lang 2001/, /Niemeier & Tengen 2017/, /Neumann 2012/ und /Schwarz 2004/.

## 2 ZIELE UND METHODEN DES GUM

Der GUM verfolgt das Ziel, eine international einheitliche Vorgehensweise bei der Ermittlung von Messunsicherheiten bzw. Unsicherheiten anzustreben, um Messergebnisse weltweit vergleichbar zu machen. Dadurch, dass die Vorgehensweise zur Bestimmung der Messunsicherheit eingehend zu begründen und zu dokumentieren ist, gewinnt die Ableitung von Messunsicherheiten durchweg an Transparenz, wird für Dritte nachvollziehbar und reduziert die Gefahr von Fehlinterpretationen zwischen den beteiligten Partnern.

Die Messunsicherheit nach GUM wird nach /JCGM 104:2009, S. 12/ wie folgt definiert:

*„Die Messunsicherheit ist definiert als nichtnegativer Parameter, der die Streuung derjenigen Werte kennzeichnet, die einer Messgröße auf der Grundlage der benutzten Informationen beigeordnet ist.“*

Nach dieser Definition sollen im Genauigkeitsmaß der Messunsicherheit alle vorliegenden Informationen berücksichtigt werden, also nicht nur die, die nach statistischen Methoden berechenbar sind, sondern auch solche, die z. B. aufgrund von Erfahrungswerten die Genauigkeit beeinflussen, wie z. B. nicht erfasste systematische Messabweichungen. In dieser Erweiterung des Genauigkeitsbegriffs liegt die wesentliche Bedeutung des GUM.

Der GUM stellt zur Bestimmung der Messunsicherheit demzufolge zwei Kategorien von Methoden zur Verfügung, mit deren Hilfe die Einflussgrößen auf Messungen genauigkeitsmäßig bewertet werden können und zwar

- Typ A: Berechnung der Messunsicherheit durch statistische Analyse der Messungen und
- Typ B: Berechnung der Messunsicherheit mit anderen Mitteln als der statistischen Analyse.

Unter die Kategorie vom Typ A fallen alle Informationen, die mit statistischen Methoden gewonnen werden können. Beim Typ A werden also die bekannten klassischen Verfahren der deskriptiven (auch: beschreibenden) Statistik eingesetzt, um z. B. aus den Messabweichungen Genauigkeitsmaße, wie z. B. das der Standardabweichung, zu berechnen. Zumeist sind die Messwerte normalverteilt, was aber nicht zwingend erforderlich ist.

Derartige Berechnungsverfahren gibt es für die Einflussgrößen vom Typ B nicht. Hier kann man nur mit zusätzlichen Informationen über den Messprozess, mit Herstellerangaben, mit Daten aus Überprüfungen und Kalibrierungen sowie mit den Erfahrungen und Kenntnissen des Messingenieurs versuchen, die dominierenden

„nicht erfassten systematischen Messabweichungen“ abzuschätzen. Jeder dieser geschätzten Messabweichungen wird eine Verteilung (siehe Abschnitt 3.1) zugeordnet. Sind keine speziellen Informationen über die systematischen Messabweichungen vorhanden, wird eine Gleich-Verteilung (Rechteck-Verteilung) angenommen.

Die Qualität der Eingangsgrößen  $x_i$  wird durch ihre Standardunsicherheit  $u(x_i)$  mit  $i = 1, \dots, n$  und  $n =$  Anzahl der Eingangsgrößen beschrieben. Die Standardunsicherheit entspricht im Prinzip der empirischen Standardabweichung des Mittels der Beobachtungen bzw. wird aus den Parametern der Verteilungen (siehe Abschnitt 3.1) abgeleitet. Beim Typ A sind die berechneten Standardabweichungen der Eingangsgrößen bereits ihre Standardunsicherheiten.

Von der Standardunsicherheit  $u(x_i)$  der Eingangsgrößen  $x_i$  ist die Standardunsicherheit  $u_i(y)$  zu unterscheiden. Die Standardunsicherheit  $u_i(y)$  beschreibt den Einfluss der Standardunsicherheit  $u(x_i)$  auf die zu bestimmende Größe  $y = f(x_i)$ , d. h., dass in  $u_i(y)$  der Empfindlichkeits- bzw. Sensitivitätskoeffizient  $c_i$  (vgl. Abschnitt 3.3.2) berücksichtigt wird. Es gilt nach /JCGM 100:2008, S. 9/:

$$u_i(y) = |c_i| \cdot u(x_i). \quad (1)$$

Die Messunsicherheit der Zielgröße ergibt sich schließlich als GUM-Festlegung durch eine quadratische Zusammenfassung aller Standardunsicherheiten  $u_i(y)$  der Typen A und B (vgl. Gl. (19) bzw. (20)).

Während bei der Messunsicherheitsbestimmung mit den beiden Typen A und B Standardunsicherheiten verwendet und auf die Zielgrößen übertragen werden, werden bei dem mit dem GUM-Supplement 1 (DIN V ENV 13005 Beiblatt 1 (Vornorm-Entwurf)) im Jahr 2008 eingeführten GUM-Verfahren Wahrscheinlichkeits-Verteilungen unter Verwendung der Monte-Carlo-Methode auf die Zielgrößen fortgepflanzt (vgl. im Teil 2 die Abschnitte 3.4 und 3.5).

Das Verfahren des GUM kann sowohl bei der Bestimmung der Messunsicherheit von Messgrößen angewendet werden, die direkt gemessen worden sind, als auch bei Größen, die aus den gemessenen Messgrößen abgeleitet (Abschnitt 3.3 und im Teil 2 Abschnitt 3.4) oder über eine Ausgleichung (im Teil 2 Abschnitt 3.5) gewonnen werden.

## 3 MESSUNSICHERHEITSANALYSE

Die Bestimmung der Messunsicherheit erfolgt beim GUM nach einem festgelegten Schema. Bevor jedoch konkret auf den Ablauf einer Messunsicherheitsanalyse eingegangen wird, werden in den beiden folgenden Abschnitten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen und systematische Messabweichungen, quasi als Voraussetzung für das folgende Analyseverfahren, näher besprochen.

### 3.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Das Ergebnis eines Experiments wird oftmals nicht nur allein durch die experimentellen Vorschriften bestimmt, sondern es hängt auch vom Zufall ab. Man spricht deshalb auch von Zufallsexperimenten. Das Ergebnis eines Zufallsexperiments wird daher einer Zufallsvari-

ablen (auch Zufallsgröße genannt) zugeordnet. Hängt das Ergebnis von nur einer Größe ab, spricht man von eindimensionalen bzw. univariaten Zufallsvariablen. Sind hingegen mehrere Größen beteiligt, handelt es sich um eine multivariate Zufallsvariable. Hängt das Ergebnis speziell von nur zwei Größen ab, so wird von einer zweidimensionalen bzw. bivariaten Zufallsvariablen gesprochen. Als Beispiel für eine zweidimensionale Zufallsvariable sei die Bestimmung der  $x$ - und  $y$ -Koordinaten eines Punkts in einem geodätischen Lage-netz angeführt. Die Ausführungen im folgenden Abschnitt beziehen sich auf eindimensionale Zufallsvariable, während im Abschnitt 3.1.2 kurz auf zweidimensionale Zufallsvariable eingegangen wird.

### 3.1.1. Eindimensionale Zufallsvariablen

Der GUM verwendet unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen und Verteilungen bei der Berechnung von Messunsicherheiten. Dichtefunktionen sind nur für stetige Zufallsvariablen definiert. Sie zeigen an, in welchen Bereichen sich die Messwerte der Zufallsvariable häufen. Aus der Dichtefunktion lassen sich direkt keine Wahrscheinlichkeiten ablesen. Diese ergeben sich erst aus der Fläche unterhalb der Dichtefunktion in den zu betrachtenden Grenzen. Aus diesem Grund gibt es für einen konkreten Messwert keine Wahrscheinlichkeit, sondern immer nur für ein Intervall zweier Messwertgrenzen. Die Gesamtfläche unter der Dichtefunktion ist definitionsgemäß gleich 1 und alle Funktionswerte einer Dichtefunktion sind stets positiv, da es negative Wahrscheinlichkeiten nicht gibt. Dichtefunktionen bilden die Grundlage zur Berechnung von Verteilungsfunktionen. Verteilungsfunktionen entstehen durch die Berechnung von Teilflächen unterhalb der Dichtefunktion bzw. durch die kumulative Aufsummierung der Einzelereignisse in den Klassen empirischer Häufigkeiten. Für weitere Hinweise zu Verteilungsfunktionen wird auf die Literatur, wie z. B. /Kreyszig 1974/, verwiesen.

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten aus Dichtefunktionen soll am Beispiel der Normalverteilung demonstriert werden. In Abb. 3 ist die entsprechende Dichtefunktion  $y = f(x)$  dargestellt. Für drei Fallbeispiele wird gezeigt, wie die Wahrscheinlichkeit  $P(x)$ , dass der Messwert innerhalb der angegebenen Grenzen liegt, durch die in der Abbildung ersichtlichen Integralausdrücke berechnet werden kann.

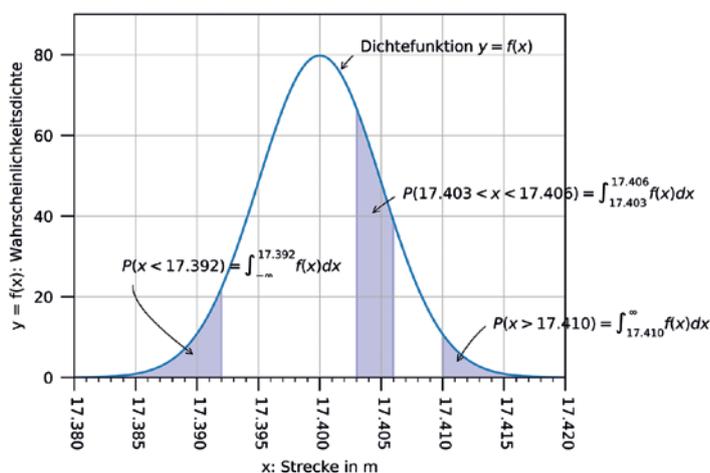


Abb. 3 | Berechnung von Wahrscheinlichkeiten aus Dichtefunktionen

Zu den Kennzahlen von Dichtefunktionen zählen u. a. der Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  ( $\sigma$  = theoretische Standardabweichung bzw. Standardabweichung der Grundgesamtheit). Der Erwartungswert  $\mu$  wird nach /Kreyszig 1974, S. 85/ berechnet mit

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad (2)$$

und die Varianz  $\sigma^2$  nach /Kreyszig 1974, S. 87f/ mit

$$\sigma^2 = \text{Var}(E) = E\left((X - \mu)^2\right), \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx. \quad (4)$$

Die positive Quadratwurzel der Varianz wird als theoretische Standardabweichung bzw. als Standardabweichung der Grundgesamtheit  $\sigma$  bezeichnet

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \quad (5)$$

#### 3.1.1.1. Normalverteilung

Die Dichtefunktion der Normalverteilung (auch als Gauß-Verteilung bezeichnet) basiert auf dem zentralen Grenzwertsatz, wonach die Summe einer großen Anzahl von unabhängigen Zufallsvariablen asymptotisch einer stabilen Verteilung folgt /Niemeier 2002, S. 35 f/. Der Normalverteilung kommt in den Natur-, Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften eine besondere Bedeutung zu, da viele Prozesse mit ihr recht zutreffend beschrieben werden können. In der Regel wird davon ausgegangen, dass die durchgeführten Messungen zur Bestimmung einer Messgröße normalverteilt sind. Weiterhin ist die Eigenschaft der Normalverteilung, dass die Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist, besonders wichtig.

Die Gleichung für die Dichtefunktion der Normalverteilung lautet /Kreyszig 1974, S. 126/

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (6)$$

mit  $f(x)$  = Funktionswert der Dichtefunktion an der Stelle  $x$ ,  $\sigma$  = theoretische Standardabweichung und  $\mu$  = Erwartungswert (näherungsweise gleich dem Mittelwert). Die Kennzahlen der Dichtefunktion sind die theoretische Standardabweichung  $\sigma$  und der Erwartungswert  $\mu$ .

Abb. 4 zeigt für unterschiedliche Standardabweichungen  $\sigma$  die zugehörigen Dichtefunktionen. Je schlanker die Dichtefunktion verläuft, desto kleiner ist die zugehörige Standardabweichung  $\sigma$ . Das Intervall  $\pm\sigma$  entspricht exakt dem Intervall zwischen den beiden Wendepunkten der Dichtefunktion. Da zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  die Gl. (6) zu integrieren ist, das Integral aber nicht auf eine elementare Stammfunktion zurückgeführt werden kann, wurde die normierte Normalverteilung mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  eingeführt und dafür Tafelwerke erstellt. Zur Handhabung der Tafelwerke sei auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen, z. B. /Höpcke 1980, S. 66/ und /Niemeier 2002, S. 39ff/.

Die Normalverteilung wird angewendet bei beobachteten Größen mit einer großen Anzahl  $n_w$  von Wiederholungsmessungen ( $n_w > 20$ ). Sind diese Bedingungen

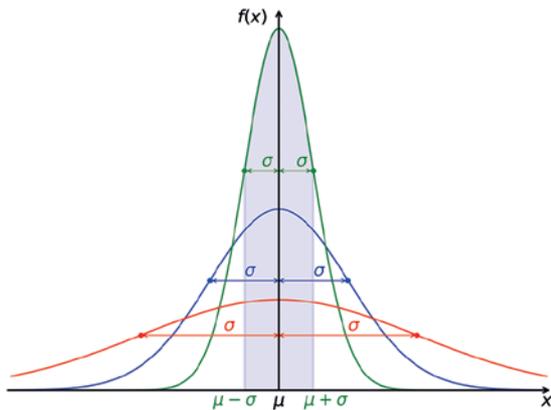


Abb. 4 | Dichtefunktionen der Normalverteilung für verschiedene Standardabweichungen

nicht erfüllt, wird die Student-Verteilung (siehe nachfolgenden Abschnitt) verwendet. Bei der Berechnung der Messunsicherheit nach GUM werden die Einflussgrößen vom Typ A zumeist durch die Normalverteilung charakterisiert (ist aber nicht unbedingt zwingend erforderlich). Die Standardabweichung erhält dabei den Gewichtungsfaktor  $G = 1$  im Messunsicherheitsbudget (siehe jeweils Punkt 5 in den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.4) und wird als Halbbreite  $a$  in die Messunsicherheitsbewertung eingeführt.

### 3.1.1.2. Student-Verteilung

Bei beobachteten Größen mit geringer Datenmenge ( $n_w < 20$ ) wird die Student-Verteilung (auch als  $t$ -Verteilung bezeichnet) verwendet. Sie hängt u. a. von der Anzahl der Freiheitsgrade  $n_f$  ( $n_f = n_w - 1$ ) ab. Für  $n_f \rightarrow \infty$  geht die Student-Verteilung in die Normalverteilung über. Die Gleichung zur Berechnung der Funktionswerte für die Dichte der Student-Verteilung lautet /Kreyszig 1974, S. 161/

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_f + 1}{2}\right)}{\sqrt{n_f \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n_f}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n_f}\right)^{-\left(\frac{n_f + 1}{2}\right)}, \quad (7)$$

Freiheitsgrad $n_f$	Anzahl der Messungen $n_w$	Student-Faktor $t$
1	2	1,84
2	3	1,32
3	4	1,20
4	5	1,14
5	6	1,11
7	8	1,08
9	10	1,06
19	20	1,03
49	50	1,01
99	100	1,01
$\infty$	$\infty$	1,00

Tab. 1 | Student-Faktoren für eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 68,3 % ( $= 1 \sigma$ ) nach /Pesch 2010, S. 35/

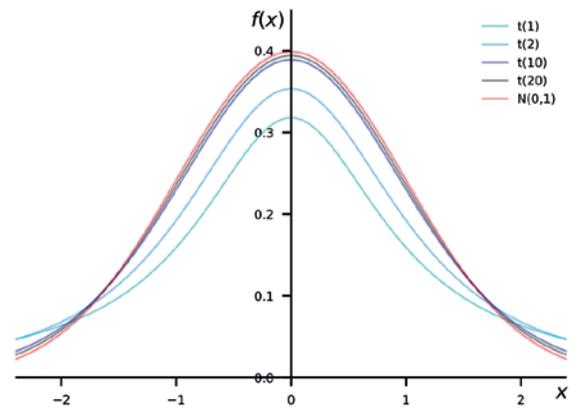


Abb. 5 | Dichtefunktionsverläufe der Student-Verteilung

mit der Gamma-Funktion  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$ . (8)

In der Abb. 5 sind für die Freiheitsgrade  $n_f = 1, 2, 10,$  und  $20$  die entsprechenden Kurvenverläufe der Dichtefunktion der Student-Verteilung  $t(1), t(2), t(10), t(20)$  und zusätzlich zum Vergleich der Kurvenverlauf der Dichtefunktion der Normalverteilung  $N(0, 1)$  eingetragen.

Die Abweichungen zwischen der Student-Funktion und der Normalverteilung werden durch den Student-Faktor  $t$  beschrieben. In Tab. 1 sind die Student-Faktoren für eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 68,3 % ( $= 1 \sigma$ ) zusammengestellt /Pesch 2010, S. 35/.

Der Student-Faktor  $t$  kann als Faktor betrachtet werden, mit dem z. B. eine empirische Standardabweichung (für  $n_w > 20$ ) zu multiplizieren ist, um die gleiche Überdeckungswahrscheinlichkeit zu erhalten wie für die Normalverteilung.

Mit der Student-Verteilung werden ebenfalls bei der Berechnung der Messunsicherheit nach GUM Einflussgrößen vom Typ A bewertet. Der Gewichtungsfaktor beträgt, wie bei der Normalverteilung, ebenfalls  $G = 1$ .

Weitere Hinweise zur Student-Verteilung können der Fachliteratur entnommen werden, wie z. B. /Höpcke 1980, S. 182f./, /Niemeier 2002, S. 86ff./ und /Pesch 2010, S. 33ff/.

### 3.1.1.3. Rechteck-Verteilung

Die Rechteck-Verteilung (auch als Universal- oder als Gleich-Verteilung bezeichnet) geht davon aus, dass in einem Intervall  $\pm a$  ( $a =$  Halbbreite) die Dichtefunktion eine Konstante ist, also die Wahrscheinlichkeit bei einer konstanten Messintervallbreite immer gleich ist. Außerhalb der Intervallgrenzen sind alle Werte der Dichtefunktion = Null. Für die Dichtefunktion gilt also:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } a_- < x < a_+, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9)$$

Aus Gl. (4) folgt mit Gl. (9), mit  $\mu = 0$  und mit den Grenzen  $a_-$  und  $a_+$  nach /Pesch 2010, S. 26/ für die Varianz  $\sigma^2$ :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2, \quad (10)$$

$$\sigma^2 = \int_{-a}^{+a} x^2 \cdot \frac{1}{2a} dx,$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} a^2.$$

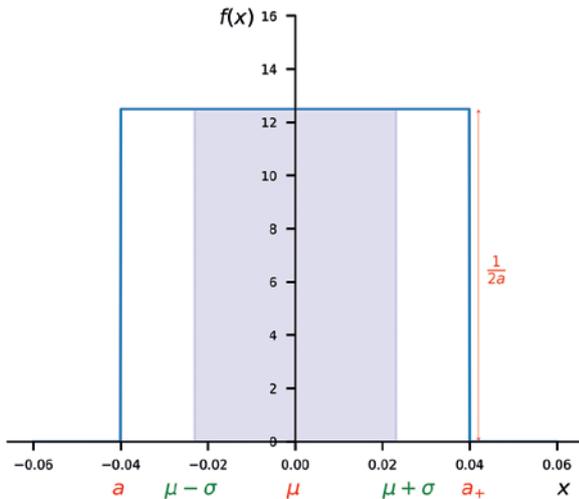


Abb. 6 | Rechteck-Verteilung (Gleich-Verteilung)

Aus der Varianz  $\sigma^2$  ergibt sich die Standardunsicherheit  $\sigma$  zu

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} a. \quad (11)$$

Die Fläche unter der Dichtefunktion ist wieder gleich 1. Abb. 6 zeigt die Rechteck-Verteilung.

Die Rechteck-Verteilung wird bei der Berechnung der Messunsicherheit nach GUM verwendet und zwar für Einflussgrößen vom Typ B, von denen keine näheren Informationen vorliegen, wie z. B. bei den Ablesewerten an Digitalanzeigen, bei Herstellerinformationen usw. Im Messunsicherheitsbudget erhalten diese

Einflussgrößen den Gewichtungsfaktor  $G = \frac{1}{3}$ .

### 3.1.1.4 Symmetrische Dreieck-Verteilung

Bei der Dreieck-Verteilung häufen sich die Messwerte um den Mittelwert. Die Summe zweier identischer unabhängiger und stetig gleichverteilter Zufallsvariablen ist z. B. Dreieck-verteilt. Ebenso ist der Betrag der Differenz gleichverteilter Zufallsvariablen Dreieck-verteilt /Pesch 2010, S. 27/. Durch die Differenzbildung werden systematische Einflüsse der Messanordnung, die sich bei beiden Messungen in gleicher Weise auswirken, reduziert mit der Folge, dass eine kleinere Messunsicherheit erhalten wird.

Für die Dichtefunktion einer symmetrischen Dreieck-Verteilung folgt aus der Bedingung, dass die Fläche unter der Funktion = 1 sein muss (vgl. Abb. 7):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} \cdot (x - \mu + a) & \text{für } a_- < x < \mu, \\ \frac{1}{a^2} \cdot (-x + \mu + a) & \text{für } \mu < x < a_+, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12)$$

Aus Gl. (4) folgt mit Gl. (12), mit  $\mu = 0$  und mit den Grenzen  $a_-$  und  $a_+$  (ohne Ableitung) nach /Pesch 2010, S. 27f./ für die Varianz  $\sigma^2$ :

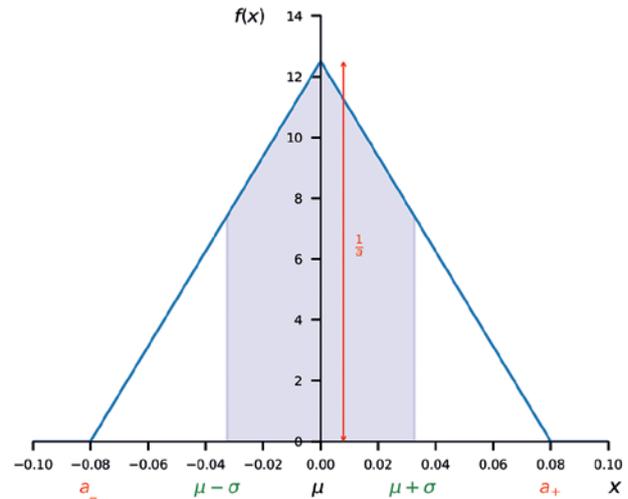


Abb. 7 | Symmetrische Dreieck-Verteilung

$$\sigma^2 = \frac{1}{6} a^2. \quad (13)$$

Aus der Varianz  $\sigma^2$  ergibt sich für die Standardunsicherheit  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{6}} a. \quad (14)$$

Die Dreieck-Verteilung wird auch bei der Berechnung der Messunsicherheit nach GUM verwendet und zwar für Einflussgrößen vom Typ B. Im Messunsicherheitsbudget erhalten diese Einflussgrößen den Gewichtungsfaktor  $G = \frac{1}{6}$ .

Neben den hier angesprochenen Verteilungen gibt es noch eine Reihe weiterer Verteilungen, wie z. B. die Trapez-Verteilung oder die U-Verteilung, die in der Regel für die in diesem Beitrag gezeigten Anwendungen nicht weiter von Interesse sind, aber in der Literatur, z. B. /Pesch 2010, S. 28 ff./, vertieft werden können.

### 3.1.2 Zweidimensionale Zufallsvariablen

Die Dichtefunktion für normalverteilte, zweidimensionale Zufallsvariable ist nach /Kreyszig 1974, S. 312 ff./ als Erweiterung der eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichte nach Gl. (6) definiert als

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1 - \rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right)}, \quad (15)$$

mit  $f(x, y)$  = Funktionswert der Dichtefunktion an der Stelle  $x, y$ ,  $\sigma_1, \sigma_2$  = theoretische Standardabweichungen,  $\mu_1, \mu_2$  = Erwartungswerte (näherungsweise gleich den Mittelwerten) und  $\rho$  = theoretischer Korrelationskoeffizient zwischen den Größen  $x$  und  $y$ .

In Abb. 8 ist beispielhaft die Dichtefunktion einer zweidimensionalen Normalverteilung mit den in der Abbildungsunterschrift angegebenen Parametern dargestellt. Ist bei der eindimensionalen Normalverteilung die Fläche unterhalb der Dichtefunktion gleich eins (vgl. Abschnitt 3.1.1.), so ist bei der zweidimensionalen Normalverteilung definitionsgemäß das Volumen unter der Dichtefunktion

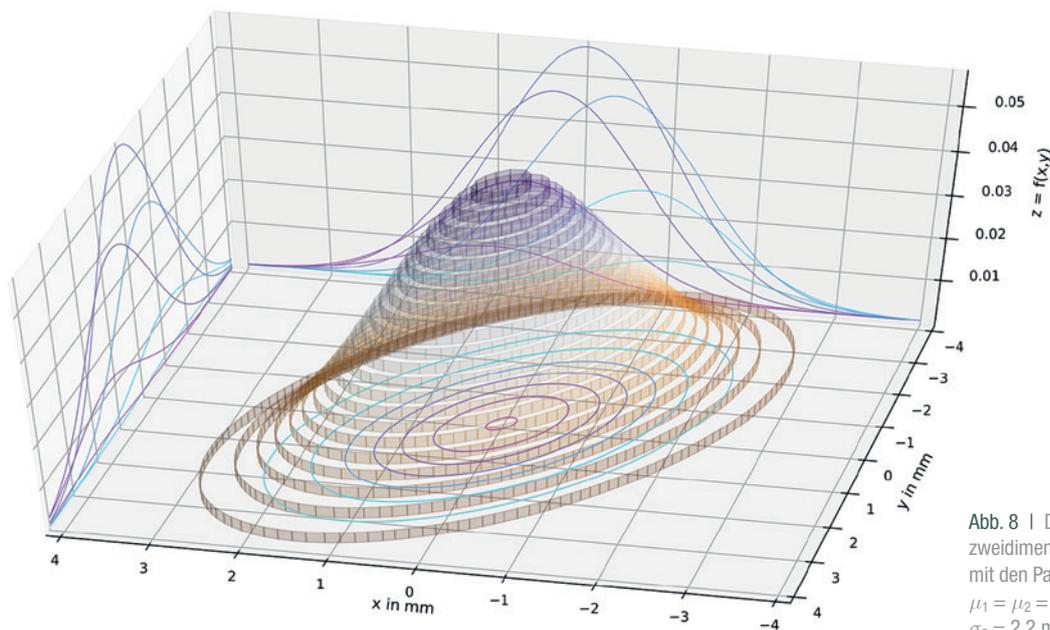


Abb. 8 | Dichtefunktion einer zweidimensionalen Normalverteilung mit den Parametern  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = 1,6$  mm,  $\sigma_2 = 2,2$  mm und  $\rho = -0,6$

gleich eins. Die Wahrscheinlichkeit, dass die  $x$ - und  $y$ -Werte innerhalb eines angegebenen Intervalls liegen, wird als Doppelintegral der Funktion  $f(x, y)$  über das Intervall berechnet. Die Kurven gleicher Wahrscheinlichkeit  $f(x, y) = \text{const}$  sind im allgemeinen Fall nach /Kreyszig 1974, S. 314/ Ellipsen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . In Abb. 8 sind sie z. B. in der  $xy$ -Ebene in unterschiedlichen Farben dargestellt. Sind die Standardabweichungen  $\sigma_1 = \sigma_2$  und ist der Korrelationskoeffizient  $\rho = 0$ , so werden die Kurven gleicher Wahrscheinlichkeit kreisförmig. Vertikalschnitte durch die Dichtefunktion  $f(x, y)$  haben die Form einer eindimensionalen Normalverteilung. In Abb. 8 sind sie als Projektion auf die  $xz$ - bzw. auf die  $yz$ -Ebene dargestellt.

Mit  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  und  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  sowie für unkorrelierte Beobachtungen mit  $\rho = 0$  ergibt sich aus Gl. (15) die spezielle Beziehung

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right)}. \quad (16)$$

### 3.2 Systematische Messabweichungen

Das besondere Ziel des GUM ist es, nicht erfasste systematische Messabweichungen im Genauigkeitsmaß der Messunsicherheit zu berücksichtigen. Als Voraussetzung dazu sollen in diesem Abschnitt einige Quellen systematischer Messabweichungen besonders für den Bereich der Ingenieurgeodäsie angesprochen und Abschätzungen über deren Größenordnung in Abhängigkeit von den jeweiligen Messbedingungen diskutiert werden.

Unter systematischen Messabweichungen werden diejenigen Abweichungen eines Messwerts von ihrem wahren Wert verstanden, die stets einseitig wirken und deren Ursachen im Prinzip bekannt sind, aber nicht direkt quantifiziert werden können.

Systematische Messabweichungen können im Gegensatz zu zufälligen Abweichungen durch Wiederholungsmessungen weder

erkannt noch reduziert werden. Sie lassen sich nur durch den Einsatz anderer Messverfahren und durch Veränderung der örtlichen Messbedingungen aufdecken.

#### 3.2.1 Atmosphärische Korrektur bei der elektrooptischen Distanzmessung

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwellen bei der elektrooptischen Distanzmessung, wie z. B. bei der Tachymetrie und beim Laserscanning, hängt u. a. von der Lufttemperatur, dem Luftdruck und der Luftfeuchtigkeit ab. Aus diesem Grund müssen diese atmosphärischen Parameter – der wichtigste davon ist die Lufttemperatur – bestimmt werden, um damit die gemessenen Strecken geräteintern oder extern zu korrigieren. Zumeist werden diese Parameter aber nur punktuell am Standort des Geräts gemessen. Sie sind damit nicht repräsentativ für den gesamten Streckenverlauf. Die Abweichung der integralen Lufttemperatur längs der gesamten Visurlinie von dem am Gerät gemessenen Wert beeinträchtigt als systematische Messabweichung das Messergebnis der Distanzmessung. Damit diese Einflussgröße in der für die Distanzmessung anzugebenden Messunsicherheit nach GUM berücksichtigt werden kann, ist vom Beobachter mit seinen Erfahrungen in Anbetracht der örtlichen Verhältnisse abzuschätzen, wie groß die Abweichung zwischen der integralen und der punktuell gemessenen Lufttemperatur maximal sein kann. Da über die Verteilung dieser Abweichung keine näheren Informationen vorliegen, wird zur Umrechnung der Abweichung in eine Standardunsicherheit die Gleich-Verteilung (Rechteck-Verteilung) angenommen. Beträgt der Schätzwert für die Temperaturdifferenz z. B.  $\pm 5$  K und ist die Distanz 600 m lang, so beträgt nach der bekannten Relation, dass bei einer Temperaturabweichung von 1 K sich der Korrekturwert um etwa  $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mm/km}$  ändert, die Halbbreite  $a_{\text{km}}$  der Einflussgröße  $\delta_{\text{km}}$   $a_{\text{km}} = 3 \text{ mm}$  ( $= 5 \text{ K} \times 0,600 \text{ km} \times 1 \text{ mm/km/K}$ ). Die Standardunsicherheit dieser systematischen Einflussgröße ergibt sich nach Gl. (11) somit zu

$$\delta_{km} = \frac{a_{km}}{\sqrt{3}} = 1,7 \text{ mm.}$$

### 3.2.2 Zyklische Korrektur

Zyklische Abweichungen (früher als zyklischer Phasenfehler bezeichnet) treten bei der elektrooptischen Distanzmessung auf. Sie entstehen durch Überlagerung der Hochfrequenzanteile des Senders mit denen des Empfängers und durch Mischung der Signalanteile des Sendestrahls mit denen, die durch Reflexionen in den gemeinsam durchlaufenen optischen Bauteilen hervorgerufen werden. Die Größe der zyklischen Abweichungen hängt weiterhin von den Eigenschaften des verwendeten Reflektors (z.B. Durchmesser, Glasgüte, Schliffqualität des Prismas) und von der Länge der Distanz ab /Fuchs 2013/. Zyklische Abweichungen werden auch besonders von in der Nähe des Reflektors vorhandenen reflektierenden Flächen (z.B. an der Reflektorhalterung, von in der Streckenverlängerung vorhandenen Schaufenster- bzw. Glasscheiben und geparkten Pkw) beeinflusst. Auch wenn derzeit die zyklischen Abweichungen in der Regel vom Hersteller werkseitig bestimmt und als Korrektur automatisch berücksichtigt werden, verbleiben doch aufgrund der aufgeführten, vielfältigen, örtlich unterschiedlichen Entstehungsmöglichkeiten zyklischer Abweichungen Restanteile, die nicht von der werkseitigen Korrektur erfasst werden. Um für das Streckenmessergebnis eine möglichst zutreffende Messunsicherheit nach GUM zu bestimmen, hat der Vermessungsingenieur wiederum aufgrund seiner Erfahrungen und aufgrund von speziellen Untersuchungen (wie z. B. /Fuchs 2013/) die möglichen Restsystematiken abzuschätzen und, wie bereits im Abschnitt 3.2.1. gezeigt, in eine Standardunsicherheit umzurechnen.

### 3.2.3. Refraktion bei optischen Zielungen

Bei optischen Zielungen verlaufen die Visurstrahlen aufgrund der Dichteunterschiede der Atmosphäre nicht streng geradlinig (terrestrische Refraktion). Die Dichte der Atmosphäre wird für sichtbares Licht durch den Brechungsindex  $n_{opt}$  ausgedrückt. Die Krümmung der Visurstrahlen wird primär durch die Komponenten des Brechungsindexfelds quer zur Visurrichtung hervorgerufen. Um eine Vorstellung von der Größe der Zielstrahlkrümmung zu entwickeln, wird von einem einfachen Modell, nämlich von einem konstanten Brechungsindexgradienten entlang der gesamten Visur, ausgegangen. In diesem Fall verläuft der Visurstrahl kreisbogenförmig (Abb. 9). In der Realität sind die Verhältnisse wesentlich komplizierter und es können die Parameter der Atmosphäre entlang der gesamten Visur nur schwer bestimmt werden, um die Zielstrahlkrümmung zuverlässig und zutreffend zu korrigieren.

Der größte Einfluss auf den Brechungsindexgradienten  $\frac{\partial n_{opt}}{\partial y}$  wird von der Lufttemperatur  $T$  ausgeübt. Es gilt näherungsweise:

$$\frac{\partial n_{opt}}{\partial y} = -10^{-6} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = b. \quad (17)$$

Damit ergeben sich nach /Schwarz 1995/ der Ablenkwinkel  $\frac{\gamma}{2}$  und die Größe  $z$  (vgl. Abb. 9) in Abhängigkeit von der Länge der Visur  $l$  zu

$$\begin{aligned} \gamma &= b \cdot l \text{ und} \\ z &= \frac{l^2}{8} \cdot b. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Größe  $z$  beschreibt den maximalen Abstand zwischen der Verbindungsgeraden der Punkte  $A$  und  $B$  und der gekrümmten Visurlinie. Diese Information ist z.B. bei hochpräzisen Fluchtungsmessungen wichtig, um die erreichbare Genauigkeit beurteilen zu können. Der Ablenkwinkel  $\frac{\gamma}{2}$  ist die systematische Abweichung, um den auf dem Punkt  $A$  gemessene Richtungen verfälscht werden.

Um eine grobe Vorstellung von den Auswirkungen der terrestrischen Refraktion zu erhalten, sind in Tab. 2 für einen Temperaturgradienten von  $\left|\frac{\partial T}{\partial y}\right| = 0,1 \text{ K/m}$  die sich aus den Gln. (18) ergebenden Ablagewerte zusammengestellt. Zum einen wird der Temperaturgradient im Freien, wenn keine besonderen Umstände vorliegen, kleiner sein als der hier benutzte Wert, zum anderen kann er aber besonders in geschlossenen Räumlichkeiten, z.B. Tunneln, Werkshallen, und in den bodennahen Luftschichten an sonnigen Tagen (besonders in den Abendstunden) auch wesentlich größer sein.

Für die Bestimmung der Messunsicherheiten nach GUM für Fluchtungs- bzw. für Richtungsmessungen sind mit den für die örtlichen Verhältnisse geltenden Parametern, die geschätzt werden

Zielentfernung $l$	Ablenkwinkel $\gamma$	Pfeilhöhe $z$	Ablenkung im Zielpunkt (= $4z$ )
50 m	0,3 mgon	0,03 mm	0,1 mm
100 m	0,6 mgon	0,1 mm	0,5 mm
200 m	1,3 mgon	0,5 mm	2,0 mm
400 m	2,5 mgon	2,0 mm	8,0 mm
600 m	3,8 mgon	4,5 mm	18,0 mm

Tab. 2 | Auswirkungen der terrestrischen Refraktion bei einem Temperaturgradienten von  $\left|\frac{\partial T}{\partial y}\right| = 0,1 \text{ K/m}$

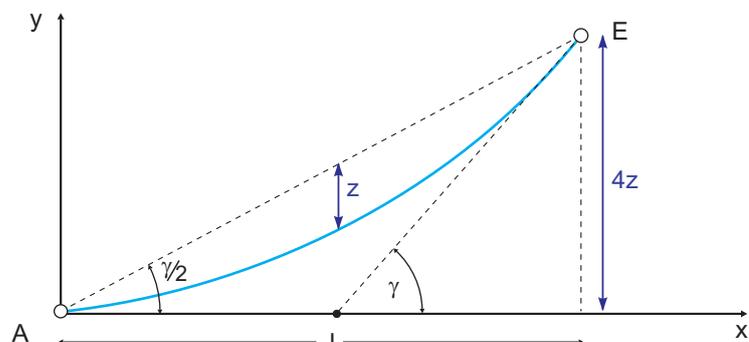


Abb. 9 | Terrestrische Refraktion bei optischen Zielungen mit einem konstanten Temperaturgradienten

müssen, die jeweiligen Einflussgrößen  $\delta$  zu berechnen, um sie dann – wieder in Ermangelung weiterer Informationen – nach Gl. (17) unter Anwendung der Rechteck-Verteilung in Standardunsicherheiten umzurechnen.

### 3.2.4. Weitere Einflussgrößen für systematische Messabweichungen

Weitere nicht erfasste systematische Messabweichungen, auf die aber hier nicht näher eingegangen wird, treten z. B. auf:

1. Bei der Kalibrierung von Längenmesseinrichtungen mit Prüfnormalen auf einem Komparator. Befinden sich beide Objekte nicht in einer Geraden, wird das Abbesche Komparatorprinzip verletzt, was letztlich wieder zu systematischen Messabweichungen führen kann.
2. Heutzutage werden die Richtungs- und Zenitwinkelmessungen zumeist nur noch in einer Fernrohrlage vorgenommen. Änderungen der Instrumentenabweichungen in Bezug zu ihren letzten Bestimmungen führen auch hier wieder zu systematischen Messabweichungen, die für eine Genauigkeitsbewertung nach GUM zu quantifizieren sind.
3. Beim Monitoring werden Sensoren eingesetzt, deren Signale analog sind und zum Teil über größere Entfernungen in elektrischen Leitungen übertragen werden müssen. Je nach dem gewählten Verfahren der Signalübertragung können die (analogen) Signale durch Umwelteinflüsse (z. B. Umgebungstemperatur, elektrische und magnetische Felder) systematisch verfälscht werden.
4. Neigungsmessungen mit elektrischen Neigungssensoren können z. B. durch externe Vibrationen am Messort systematisch beeinflusst werden. Die als Beschleunigungen wirkenden Vibrationen

können von den eigentlich zu messenden Neigungen nicht getrennt werden.

5. Nicht direkt erfassbare systematische Messabweichungen können auch beim geometrischen Nivellement entstehen, wenn aufgrund der örtlichen Gegebenheit, wie z. B. bei Industrievermessungen, die Zielweiten für den Vor- und Rückblick nicht gleich sind oder das Einschwingverhalten des Kompensators durch äußere Einflüsse (z. B. durch elektrische und magnetische Felder) systematisch beeinträchtigt wird.

### 3.2.5 Quantifizierung systematischer Messabweichungen

Systematische Messabweichungen können, wie bereits erläutert, durch eine Schätzung quantifiziert werden. Dadurch wird aber die Messunsicherheit entsprechend größer. Es ist zum Teil auch möglich, systematische Messabweichungen, z. B. bei den zyklischen Abweichungen bei der elektrooptischen Distanzmessung, durch eine Kalibrierung funktional zu bestimmen und damit die Messwerte zu korrigieren. Dadurch wird der Anteil der nicht erfassten systematischen Messabweichungen geringer und damit die Messunsicherheit nach GUM entsprechend kleiner. Der Vermessungsingenieur muss im Einzelfall entscheiden, ob nur über eine spezielle Kalibrierung der Messapparaturen die Genauigkeitsforderungen eingehalten werden können. Aber auch bei einer sorgfältigen Kalibrierung werden – wenn auch kleinere – Restabweichungen übrig bleiben, die gegebenenfalls im Genauigkeitsmaß der Messunsicherheit zu berücksichtigen sind.

Die in den Abschnitten 3.2.1 bis 3.2.4 angesprochenen Quellen von nicht erfassten systematischen Messabweichungen bei ingenieurgeodätischen Aufgabenstellungen sind nicht vollständig.

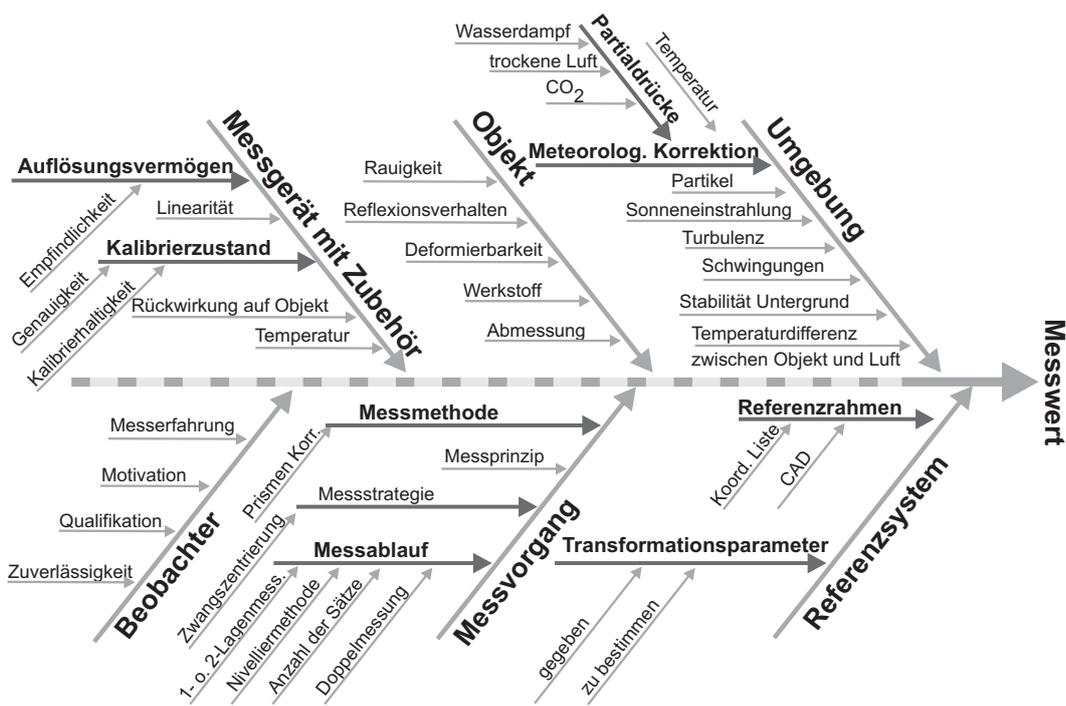


Abb. 10 | Ishikawa-Diagramm nach /Hennes 2007/, anzupassen auf die jeweilige Messaufgabe

Dem Vermessungsingenieur obliegt es, den Messprozess unter den gegebenen örtlichen Randbedingungen unter Beachtung der Eigenschaften der einzusetzenden Messapparaturen zu analysieren, systematisch auf die Messungen wirkende Effekte zu erkennen und letztlich aufgrund seines Sachverstands die nicht erfassten systematischen Messabweichungen zu quantifizieren, um sie in der Messunsicherheitsanalyse nach GUM zu berücksichtigen.

Bei der Analyse der relevanten Einflussparameter bei einem Messprozess kann das sog. Ishikawa-Diagramm (Abb. 10) hilfreich sein. Es dient als Ursache-Wirkungs-Diagramm nicht nur zur Systematisierung aller möglichen Einflüsse, sondern unterstützt auch die Prüfung auf Vollständigkeit. Das Diagramm gleicht einer Fischgräte, wobei der Hauptstrang auf das Ziel, nämlich den Messwert, weist. Seitlich sind die Haupteingangsgrößen mit weiteren Untergliederungen und einzelnen Komponenten eingetragen.

### 3.3 Messunsicherheitsbestimmung mit den Typen A und B

Der Ablauf einer Messunsicherheitsanalyse wurde bereits im Abschnitt 2 angedeutet. Danach sind zuerst die möglichen Einflussgrößen, die für die Qualität des Messergebnisses relevant sind, zu bestimmen und den beiden Kategorien A oder B (vgl. Abschnitt 2) zuzuordnen.

Die Einflussfaktoren der Kategorie A können mit den bekannten Mitteln der deskriptiven Statistik bewertet werden. Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Messwerte einer Normal- bzw. Student-Verteilung folgen, dass das arithmetische Mittel der Messwerte der beste Schätzwert ist und dass die empirische Standardabweichung (Standardabweichung des Mittels der Stichprobe) der Standardunsicherheit zugeordnet werden kann. Es sind aber auch Bewertungen möglich, wenn die Messwerte andere Verteilungen zeigen.

Wie geht man nun bei den Einflussfaktoren der Kategorie B vor? Sie sollen ja nach GUM mit „anderen Mitteln“ bewertet werden. Der GUM sieht dafür vor, dass zuerst die maximale Größe der nicht erfassten systematischen Messabweichungen „berechnet“ bzw. mithilfe des ingenieurmäßigen Sachverstands oder allgemeinen Kenntnissen abgeschätzt wird. Weitere Informationsquellen für diese Abschätzung können allgemeine Erfahrungen über die Eigenschaften und das Verhalten von Messinstrumenten und Materialien, Herstellerangaben, Kalibrierscheine und andere Zertifikate sowie Referenzdaten und Literaturangaben sein. Jedem Einflussfaktor wird dann eine Verteilung zugeordnet. Weil weitergehende Informationen in der Regel zu den Einflussgrößen fehlen, wird zumeist als Verteilung die Rechteck- bzw. Gleich-Verteilung (vgl. Abschnitt 3.1.1.3) angenommen. Die maximale Größe eines jeden Einflussfaktors, die Halbbreite  $a_i$  (vgl. Abschnitte 3.1.1.3 und 3.1.1.4), wird mit den Parametern der Verteilung in entsprechende Standardunsicherheiten  $u(x_i)$  umgerechnet, um dann nach Gl. (1) unter Berücksichtigung der Sensitivitätskoeffizienten  $c_i$  den Einfluss der Standardunsicherheit  $u(x_i)$  auf die zu bestimmende Größe  $u_i(y)$  zu ermitteln.

Eine gut fundierte Ermittlung der Standardunsicherheit nach der Methode B ist genauso verlässlich wie eine Festlegung nach Methode A, insbesondere dann, wenn die Berechnung der Standard-

unsicherheit nach Methode A nur auf einer verhältnismäßig geringen Anzahl von statistisch unabhängigen Beobachtungen beruht.

Alle Standardunsicherheiten  $u_i(y)$  beider Kategorien werden zu guter Letzt zur kombinierten Messunsicherheit der Zielgröße definitionsgemäß quadratisch zusammengefasst (vgl. Abschnitt 3.3.2).

#### 3.3.1 Ablauf einer Messunsicherheitsbestimmung

Eine Messunsicherheitsbestimmung gliedert sich in folgende Punkte /Pesch 2010, S. 17/:

1. Analyse der Aufgabenstellung:
  - a. Frage nach der Messgröße und nach den Rahmenbedingungen.
  - b. Abklären, ob die eigenen Möglichkeiten ausreichend sind, um die Aufgabe zu erfüllen. Hierzu muss gegebenenfalls die Messunsicherheitsanalyse mit typischen, zu erwartenden Werten vorgezogen werden.
2. Definition der Messgröße:
 

Darstellung der mathematischen und physikalischen Grundlagen auf der Basis der Aufgabenstellung durch Aufstellen der Prozessgleichung, die das physikalische Modell der Messung abbildet.
3. Aufbereitung der verfügbaren Daten:
  - a. Messwertaufnahme (Dokumentation der Beobachtungen).
  - b. Dokumentation der für die Messunsicherheitsanalyse notwendigen Messbedingungen (Umweltparameter usw.).
4. Berechnung der Ergebnisse:
  - a. Auswertung der Messreihen (Mittelwertbildung, Min-/Max-Bestimmung, Varianzen, Standardabweichungen).
  - b. Berechnung entsprechend dem Modell der Auswertung.
5. Messunsicherheiten und Modellgleichung:
  - a. Messunsicherheitsanalyse: Erfassung und Diskussion der Einflussgrößen.
  - b. Übernahme von Messunsicherheitseinflüssen aus Kalibrierscheinen.
  - c. Einbringen von Zwischenergebnissen aus zuvor berechneten Teilbudgets.
  - d. Modellgleichung der Messunsicherheit aufstellen.
  - e. Kombinierte Messunsicherheit  $u_c(y)$  bestimmen (vgl. Abschnitt 3.3.2), Messunsicherheitsbudget aufstellen.
6. Angabe des vollständigen Messergebnisses:
  - a. Darstellung des Messwerts.
  - b. Messunsicherheit  $u_c(y)$  zuordnen.
  - c. Analyse des Ergebnisses: gegebenenfalls prüfen, ob das vorgegebene Ziel erfüllt werden konnte.

Die einzelnen Schritte der Messunsicherheitsanalyse werden in dem Zahlenbeispiel im Abschnitt 3.3.4 ausführlich erläutert.

#### 3.3.2 Berechnung der kombinierten Messunsicherheit

Die kombinierte Messunsicherheit  $u_c(y)$  der zu bestimmenden Größe  $y$  berechnet sich aus den Standardunsicherheiten der Eingangsgrößen  $u_i(y)$  (vgl. Gl. (1)) für unkorrelierte Eingangsgrößen nach GUM (entsprechend /JCGM 100:2008, S. 19/:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i(y))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot u(x_i))^2}, \quad (19)$$

mit

$$u_i(y) = |c_i| \cdot u(x_i), \text{ vgl. Gl. (1),}$$

```

1 #- coding: utf-8 #-
2 from sympy import diff, Symbol, symbols, sin, cos, tan, sqrt
3 import numpy as np
4 rho = 200/np.pi
5 ha,h2,i,d,ka,km,kz,z,t,kr,r,kg = symbols('ha,h2,i,d,ka,km,kz,z,t,kr,r,kg')
6 hb = ha + i + (d + ka + km + kz)*cos(z) - t - kr * d**2 / 2 / r + d**2*sin(z)**2/2/r+kg
7 wha = 1061.32 # Höhe HA in m (DHHN2016-System)
8 wi = 1.45 # Instrumentenhöhe in m
9 wt = 1.82 # Reflektorhöhe in m
10 wd = 2545.139 # Schrägdistanz in m
11 wka = 0.010 # Additionskonstante in m
12 wkm = 0.025 # atmosphärische Korrektion in m
13 wkz = 0.002 # zyklische Abweichung in m
14 wz = 64.7412/rho # Zenitwinkel in gon bzw. in rad
15 wkr = 0.13 # Refraktionskoeffizient
16 wr = 6380000. # Erdradius in m
17 wkg = 0.005 # Geoidundulation in m
18
19 print "Höhe Punkt B numerisch: ",hb.subs({ha:wha, i:wi, d:wd, ka:wka, km:wkm,kz:wkz, z:wz,t:wt,
20 kr:wkr, r:wr, kg:wkg})
21
22 print
23 print "Ableitungsfunktion: ",hb.diff(d)
24 print "Ableitung numerisch: ",hb.diff(d).subs({ha:wha, i:wi, d:wd, ka:wka, km:wkm,kz:wkz, z:wz,t:wt,
25 kr:wkr, r:wr, kg:wkg})

```

Abb. 11 | Python-Programm (Python Version 2.7) zur Berechnung der Ableitung nach der Distanz  $d$

$$u(x_i) = \sqrt{G_i} \cdot a_i \text{ und}$$

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Hierin bedeuten

$u_c(y)$  = kombinierte Messunsicherheit der zu bestimmenden Größe  $y$ ,

$u(x_i)$  = Standardunsicherheit der Eingangsgröße  $x_i$ ,

$u_i(y)$  = Anteil der Standardunsicherheit  $u(x_i)$  an der Standardunsicherheit der zu bestimmenden Größe  $y$ ,

$G_i$  = Gewichtsfaktor der Größe  $x_i$

( $G = 1$  bei Normal- und Student-Verteilung,

$G = 1/3$  bei Rechteck-Verteilung,

$G = 1/6$  bei Dreieck-Verteilung),

$$c_i = \frac{\delta f}{\delta x_i} = \text{Sensitivitätskoeffizient}$$

= partielle Ableitung der Modellgleichung nach der Einflussgröße  $x_i$ ,

$a_i$  = Halbbreite der Einflussgröße  $x_i$  und

$n$  = Anzahl der Einflussgrößen.

Die Sensitivitätskoeffizienten  $c_i$  geben an, wie sich die zu bestimmende Größe  $y$  bei kleinen Änderungen der Eingangsgrößen  $x_i$  ändert. Die Berechnung der Sensitivitätskoeffizienten als Ableitungen der Funktion der zu bestimmenden Größe  $y = f(x_i)$  nach ihren Eingangsgrößen  $x_i$  ist mitunter zeitraubend und fehleranfällig. Mit modernen Programmiersprachen, wie z.B. Python, können diese Ableitungen mithilfe der zusätzlich importierbaren Pakete `sumpy` und `numpy` verhältnismäßig einfach gebildet werden. Ohne auf die Eigenschaften von Python detailliert einzugehen – einen Überblick über Python für Ingenieure und Naturwissenschaftler gibt z.B. /Woyand 2017/ – verdeutlicht das in *Abb. 11* wiedergegebene Programm-Listing (Python Version 2.7) die

Vorgehensweise beispielhaft für die Berechnung der Ableitung nach der Schrägentfernung  $d$  des Zahlenbeispiels (vgl. Abschnitt 3.3.4).

In den Zeilen 2 und 3 werden die Zusatzpakete `numpy` und `sympy` bzw. einige Elemente aus den Paketen importiert. In der Zeile 5 werden die Symbole der Variablen festgelegt. In Zeile 6 wird die Funktion zur Berechnung der zu bestimmenden Größe, hier also zur Berechnung der Höhe des Punkts  $B$ , in allgemeiner Form angegeben. In den Zeilen 7 bis 17 werden den Variablen ihre Zahlenwerte zugewiesen. In den Zeilen 19 bis 25 erfolgen die eigentlichen Berechnungen der Ableitung in verschiedenen Formen nach der Schrägdistanz  $d$ . *Abb. 12* zeigt die Ausgabe. In Zeile 2 der *Abb. 12* wird der Funktionswert der Funktion ausgegeben, gefolgt von der mit dem Programm gebildeten Ableitungsfunktion (Zeile 4) und den Darstellungen der Ableitungen in numerischer Form (Zeile 5).

Die Ableitungen nach den anderen Eingangsgrößen können durch Eintrag des entsprechenden Variablennamens im ersten Klammerausdruck in den Zeilen 23 und 24 ermittelt werden.

Gl. (19) gilt für unkorrelierte Beobachtungen. Für korrelierte Beobachtungen ( $x_i$  und  $x_j$ ) ist folgende Gleichung (entsprechend /JCGM 100:2008, S. 21/) zu verwenden:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot u(x_i))^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_i \cdot c_j \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)}, \quad (20)$$

mit

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)}.$$

```

1 C:\Python27\python.exe E:/avn_GUM/Abb_hoherAufloesung/Abb11_avn_gum03c.py
2 Höhe Punkt B numerisch: 2399.91803592915
3
4 Ableitungsfunktion: -d*kr/r + d*sin(z)**2/r + cos(z)
5 Ableitung numerisch: 0.526197116533722
6
7 Process finished with exit code 0

```

Abb. 12 | Ausgabe des Python-Programms der *Abb. 11*

Hierin wird zusätzlich zu den Erklärungen zur Gl. (19) der empirische Korrelationskoeffizient  $r(x_i, x_j) = r_{ij}$  zwischen den Einflussgrößen  $x_i$  und  $x_j$  sowie die Kovarianz  $u(x_i, x_j)$  eingeführt. In Gl. (20) beschreibt der erste Summand in dem Wurzelausdruck den unkorrelierten Fall, während der zweite Summand die Mischterme mit den Kovarianzen für die korrelierten Beobachtungen enthält.

Der GUM-Ansatz zur Berechnung der kombinierten Messunsicherheit  $u_c(y)$  nach Gl. (19) hat große Ähnlichkeiten mit dem Varianz-Fortpflanzungs-Gesetz (z.B. Niemeier 2002, S. 46 ff.), allerdings mit veränderten Begrifflichkeiten. Analog zur Schreibweise des Varianz-Fortpflanzungs-Gesetzes in Matrizen-Form kann auch die Gl. (20) durch Multiplikation folgender Matrizen gebildet werden.

Matrix der Unsicherheiten mit den Kovarianzen:

$$U_{n,n} = \begin{bmatrix} u(x_1)^2 & u(x_1, x_2) & \dots & u(x_1, x_n) \\ u(x_2, x_1) & u(x_2)^2 & \dots & u(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_n, x_1) & u(x_n, x_2) & \dots & u(x_n)^2 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

Vektor mit den Ableitungen nach den Eingangsgrößen:

$$f^T_{1,n} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]. \quad (22)$$

Die kombinierte Messunsicherheit  $u_c(y)$  der zu bestimmenden Größe  $y = f(x_i)$  ergibt sich dann zu

$$u_c(y)_{1,1} = \sqrt{f^T_{1,n} \cdot U_{n,n} \cdot f_{n,1}}. \quad (23)$$

### 3.3.3. Erweiterungsfaktor und erweiterte Messunsicherheit

Um die kombinierte Messunsicherheit  $u_c$  mit einem gewünschten Vertrauensniveau zu verbinden, wird der Erweiterungsfaktor  $k$  eingeführt, mit dem der nach Gl. (19) bzw. Gl. (20) berechnete Wert zu multiplizieren ist. In der Praxis werden die in Tab. 3 zusammengestellten Erweiterungsfaktoren für die dort angegebenen Einsatzbereiche verwendet. Für Aufgabenstellungen aus der Messtechnik wird zumeist der Erweiterungsfaktor  $k = 2$  gewählt.

In Abb. 13 sind die den Erweiterungsfaktoren zugeordneten Wahrscheinlichkeiten für normalverteilte, eindimensionale Zufallsgrößen graphisch dargestellt. Liegen andere Verteilungen vor, können die Quantil-Werte zu den gewählten Vertrauensintervallen

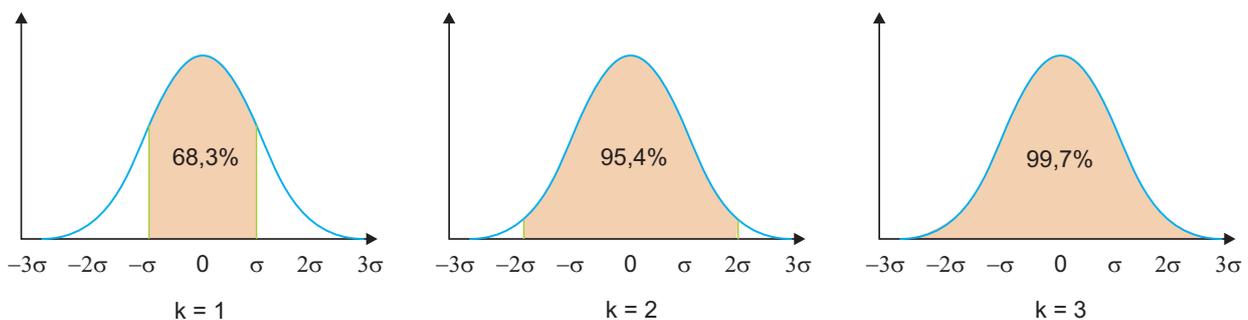


Abb. 13 | Erweiterungsfaktoren und Vertrauensintervalle für normalverteilte, eindimensionale Zufallsgrößen

Erweiterungsfaktor $k$	Vertrauensintervall	Einsatzbereiche
1	68,3 %	
2	95,4 %	Messtechnik im Allgemeinen
3	99,7 %	Messtechnik in besonderen Fällen
4	99,9 %	Eichwesen, Konformitätserklärung, Sicherheitstechnik, Medizin

Tab. 3 | Erweiterungsfaktoren

(= Überdeckungswahrscheinlichkeiten) nach dem im Teil 2 im Abschnitt 3.5.2 (Zahlenbeispiel) angegebenen Verfahren (vgl. im Teil 2 die Abb. 26 und Abb. 27) berechnet werden.

Messunsicherheiten, die mit einem Erweiterungsfaktor  $k > 1$  multipliziert werden, werden als erweiterte Messunsicherheiten bezeichnet. Der  $k$ -Faktor bzw. das Vertrauensintervall werden bei der erweiterten Messunsicherheit als tiefstehender Index geschrieben, also z.B.

$$u_c(k=2) = u_c(95\%) = u_c(0,95).$$

### 3.3.4. Zahlenbeispiel für eine Messunsicherheitsanalyse

Der Berechnungsablauf für eine Messunsicherheitsanalyse (vgl. Abschnitt 3.3.1: Punkte 1 bis 6) wird am Beispiel der trigonometrischen Höhenmessung über große Entfernungen besprochen, auch wenn heutzutage vergleichbare Aufgabenstellungen, z.B. mit GNSS-Verfahren, zum Teil effizienter bearbeitet werden können. Aber an diesem Beispiel lässt sich die GUM-Methodik zur Bestimmung der Messunsicherheit gut erläutern.

#### Punkt 1: Analyse der Aufgabenstellung

Zur Bestimmung der Höhe eines Bergs im Höhensystem „Deutsches Haupthöhennetz 2016 (DHHN2016)“ werden auf einem höhenmäßig bekannten Bodenpunkt A mit einem Tachymeter der Zenitwinkel  $z$  und die Schrägdistanz  $d$  zu dem auf dem Gipfel des Bergs (Punkt B) auf einem Stativ aufgebauten Reflektor mehrfach ( $n_w > 20$ ) gemessen (vgl. Abb. 14). Es soll die Messunsicherheit nach GUM unter Berücksichtigung aller relevanten Einflussfaktoren für die Höhe des Punkts B bestimmt werden, wobei der Punkt A als fehlerfreier Bezugspunkt dienen soll. Die Messungen werden als unkorreliert betrachtet.

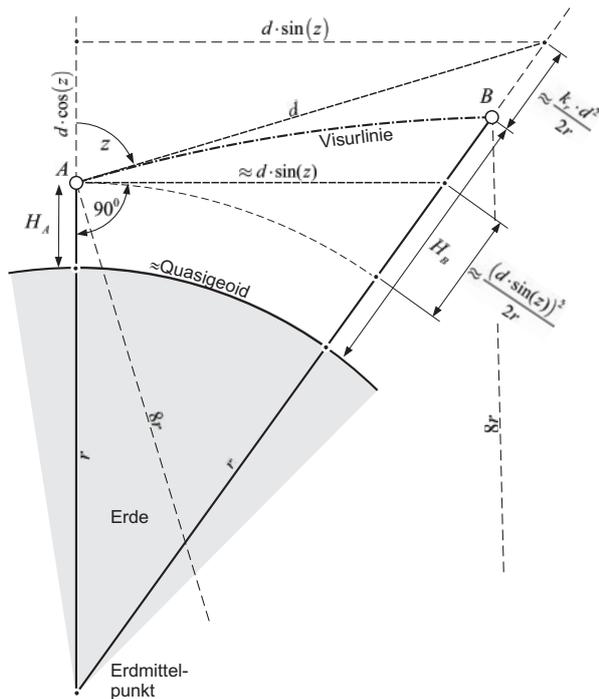


Abb. 14 | Berechnungsskizze zum Zahlenbeispiel

**Punkt 2: Definition der Messgrößen**

Die zu bestimmende Größe  $y$  ist im Allgemeinen eine Funktion der einzelnen Einflussgrößen  $x_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  ( $n = \text{Anzahl der Einflussgrößen}$ ):

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{24}$$

Gl. (24) stellt nach GUM die Prozessgleichung dar. Sie definiert die mathematischen und physikalischen Beziehungen zwischen den Messgrößen, die zur Lösung der Aufgabenstellung erforderlich sind. Die Prozessgleichung bildet damit das physikalische Modell der Messung ab. Aus ihr wird dann später die Modellgleichung entwickelt (vgl. Punkt 5, Gl. (26)).

Für die Gipfelhöhe des Bergs ergibt sich in Anlehnung an /Witte & Sparla 2015, S. 163 ff./ speziell für das Zahlenbeispiel als Prozessgleichung:

$$y = H_B = H_A + i - t + (d + k_a + k_m) \cdot \cos(z) + \frac{(d \cdot \sin(z))^2}{2r} - \frac{k_r \cdot d^2}{2r}. \tag{25}$$

Darin bedeuten

- $H_A$  = Höhe des Punktes A im DHHN2016-System
- $H_B$  = gesuchte Höhe des Punktes B im DHHN2016-System
- $i, t$  = Instrumenten- bzw. Reflektorhöhe
- $d$  = gemessene Schrägdistanz
- $z$  = gemessener Zenitwinkel
- $k_r$  = Refraktionskoeffizient
- $k_a$  = Additionskonstante
- $k_m$  = atmosphärische Korrektur
- $r$  = Erdradius

Der Term  $\frac{(d \cdot \sin(z))^2}{2r}$  in Gl. (25) beschreibt den Einfluss der Erdkrümmung, wobei die Erde als Kugel mit dem Erdradius

$r = 6380 \text{ km}$  angenommen wird. Der Term  $\frac{k_r \cdot d^2}{2r}$  drückt den Einfluss der Refraktion (Zielstrahlkrümmung) für steile Visuren aus, wobei der Visurstrahl durch die als parallel angenommenen Luftschichten als kreisförmig mit dem Radius  $= 8 \cdot r$  betrachtet wird. Diese Annahmen führen zum Refraktionskoeffizienten  $k_r = 0,13 = \left(\frac{1}{8}\right)$ .

**Punkt 3: Aufbereitung der verfügbaren Daten**

In diesem Arbeitspunkt sind die ausgeführten Beobachtungen und besonders die Umstände, unter denen sie vorgenommen worden sind, zu dokumentieren. Dazu gehören insbesondere:

1. wann wurde gemessen,
2. wo wurde gemessen,
3. wer hat gemessen und wer war beteiligt,
4. wer hat ausgewertet,
5. mit welchen Messgeräten wurde gemessen,
6. welche Messmethoden wurden eingesetzt,
7. unter welchen Bedingungen des Messumfelds und des Messobjekts wurde gemessen,
8. wie war der Kalibrierzustand der eingesetzten Geräte und Instrumente.

Der Zenitwinkel  $z$  und die Schrägentfernung  $d$  wurden mit einem auf einem Stativ über dem Bodenpunkt A aufgebauten Präzisions-tachymeter in beiden Fernrohrlagen über einen längeren Zeitraum gemessen ( $n_w > 20$ ). Die Instrumenten- und Reflektorhöhen konnten mit einem Gliedermaßstab ermittelt werden ( $n_w = 5$ ). Die Additionskonstante der Tachymeter-Reflektor-Kombination wurde zuvor im Rahmen einer Kalibriermessung auf einer Vergleichsstrecke bestimmt, ohne allerdings die zyklischen Abweichungen zu ermitteln. Die meteorologischen Parameter (Lufttemperatur und Luftdruck) wurden für die Berechnung der meteorologischen Korrektur mit geeichten Aspirationspsychrometern und Barometern auf beiden Endpunkten der Distanz punktuell gemessen. Die Witterungsbedingungen waren günstig (bedeckter Himmel, kein Hitzeflimmern, leichter Wind, kein Regen, Sichtweite ca. 30 km).

Messgröße/Parameter	Bezeichnung	Messwert	Standardabweichung (s) Standardunsicherheit (u) Halbbreite (a)
Höhe des Punktes A	$H_A$	1 061,32 m	fehlerfrei
Schrägdistanz	$d$	2 545,139 m	$s: 0,002 \text{ m}$
Zenitwinkel	$z$	64,7412 gon	$s: 0,0002 \text{ gon}$
Instrumentenhöhe	$i$	1,45 m	$s: 0,002 \text{ m}$
Reflektorhöhe	$t$	1,82 m	$s: 0,002 \text{ m}$
Refraktionskoeffizient	$k_r$	0,13	$a: 0,05$
Additionskonstante	$k_a$	0,010 m	$u: \pm 0,001 \text{ m} (k = 2)$
atmosphärische Korrektur	$k_m$	0,025 m	$a: 2 \text{ ppm}$
Erdradius	$r$	6 380 km	fehlerfrei

Tab. 4 | Zusammenstellung der Mittelwerte der Messgrößen bzw. weiterer Parameter

In Tab. 4 sind die Mittelwerte der Messungen und – soweit verfügbar – ihre Standardabweichungen sowie weitere Parameter zusammengestellt.

#### Punkt 4: Berechnung der Ergebnisse

Die Messwerte werden auf Plausibilität überprüft, die Mittelwerte gebildet und die entsprechenden Standardabweichungen aus den Mehrfachmessungen sowie die erforderlichen Korrekturwerte berechnet (vgl. Tab. 4).

Mit den Werten aus Tab. 4 berechnet sich die Höhe des Berggipfels nach Gl. (25) zu

$$\boxed{H_B = 2399,918 \text{ m}}$$

#### Punkt 5: Messunsicherheiten und Modellgleichung

Auf Grundlage der Prozessgleichung (siehe Gl. (25)) wird eine Modellgleichung entwickelt, die neben den Größen der Prozessgleichung zusätzlich noch weitere relevante Messunsicherheitseinflüsse berücksichtigt. Für das Zahlenbeispiel ergibt sich als Modellgleichung:

$$y = H_B = H_A + (i + \delta_i) - (t + \delta_t) + (d + \delta_d + k_a + \delta_{ka} + k_m + \delta_{km} + \delta_{kz}) \cdot \cos(z + \delta_z) + \frac{((d + \delta_d) \cdot \sin(z + \delta_z))^2}{2r} - \frac{(k_r + \delta_{kr}) \cdot (d + \delta_d)^2}{2r} + \delta_{kg} \quad (26)$$

Also jeder Parameter in der Prozessgleichung (Gl. (25)) ist um eine Einflussgröße  $\delta$  ergänzt worden bis auf die Größen  $H_A$  und  $r$ , weil diese Größen als fehlerfrei vorgegeben sind. Die Messungen fanden in einem verhältnismäßig kleinräumigen Gebiet statt. Aufgrund dessen kann davon ausgegangen werden, dass die Form der tatsächlichen Erde durch die angenommene Kugelgestalt hinreichend gut approximiert wird.

Aus zusätzliche Einflussgrößen sind noch hinzugekommen  $\delta_{kz}$  und  $\delta_{kg}$ . Die Einflussgröße  $\delta_{kz}$  beinhaltet den Einfluss einer zyklischen Abweichung (früher: zyklischer Phasenfehler) bei der elektrooptischen Distanzmessung, weil die zyklischen Abweichungen nicht durch eine Kalibrierung bestimmt worden sind. Weiterhin wurde in die Modellgleichung die Einflussgröße  $\delta_{kg}$  aufgenommen. Sie beinhaltet etwaige Abweichungen zwischen der angenommenen Kugelgestalt der Erde und dem tatsächlichen Verlauf des Quasigeoids. Im Gegensatz zum geometrischen Nivellement werden bei der trigonometrischen Höhenmessung die Niveauflächen nicht partiell abgetastet, sodass die dadurch hervorgerufene Abweichung in der Messunsicherheit zu berücksichtigen ist. Zentrierungenauigkeiten beim Aufbau des Tachymeters und des Reflektors werden hier vernachlässigt, weil sie sich nur in einer unbedeutenden Art und Weise auf die Höhenbestimmung auswirken.

Die Einflussgrößen für das Zahlenbeispiel werden im Folgenden diskutiert und quantifiziert.

#### Einflussgröße Schrägdistanz $\delta_d$ :

Die Schrägdistanz  $d$  wird als Mittelwert einer Vielzahl von Einzelmessungen ( $n_w > 20$ ) bestimmt. Die Standardabweichung des Mittelwerts von 0,002 m ist dann normalverteilt. Die Halbbreite des Messunsicherheitseinflusses  $a_d$  beträgt also  $a_d = 0,002$  m mit dem Gewichtsfaktor  $G_d = 1$  (Typ A).

Der Sensitivitätskoeffizient  $c_d$  ergibt sich mit Gl. (26) zu

$$c_d = \frac{\delta y}{\delta d} = \cos(z) - \frac{d \cdot k_r}{r} + \frac{d \cdot \sin(z)^2}{r} = 0,5262,$$

die Standardunsicherheit  $u(d)$

$$u(d) = \sqrt{G_d} \cdot a_d = \pm 0,002 \text{ m}$$

und die Standardunsicherheit  $u_d(y)$  nach Gl. (1)

$$u_d(y) = |c_d| \cdot u(d) = \pm 0,0011 \text{ m}.$$

#### Einflussgröße Zenitwinkelmessung $\delta_z$ :

Der Zenitwinkel  $z$  wird ebenfalls als Mittelwert einer Vielzahl von Einzelmessungen ( $n_w > 20$ ) in beiden Fernrohrlagen bestimmt. Durch die 2-Lagen-Messungen werden etwaige Instrumentenabweichungen eliminiert und sind daher für die weiteren Betrachtungen nicht mehr zu berücksichtigen. Auch hier ist die Standardabweichung des Mittelwerts von 0,0002 gon normalverteilt. Die Halbbreite des Messunsicherheitseinflusses beträgt

$$a_z = 0,0002 \text{ gon mit } G_z = 1 \text{ (Type A).}$$

Der Sensitivitätskoeffizient  $c_z$  ergibt sich zu

$$c_z = \frac{\delta y}{\delta z} = -(d + k_a + k_m) \cdot \sin(z) + \frac{d^2 \cdot \cos(z) \cdot \sin(z)}{r},$$

$$= -2164,2410 \text{ m},$$

die Standardunsicherheit  $u(z)$

$$u(z) = \sqrt{G_z} \cdot a_z = \pm \frac{0,0002 \text{ gon}}{63,6620 \text{ gon}} = \pm 0,000003142$$

und die Standardunsicherheit  $u_z(y)$

$$u_z(y) = |c_z| \cdot u(z) = \pm 0,0068 \text{ m}.$$

#### Einflussgröße Instrumentenhöhe $\delta_i$ :

Die Instrumentenhöhe  $i$  bezogen auf den vermarkten Bodenpunkt wird mit einem Gliedermaßstab insgesamt 5-mal ( $n_w = 5$ ) gemessen. Es wird davon ausgegangen, dass der Mittelwert mit einer Standardabweichung von 0,002 m Student-verteilt ist. Um die gleiche Überdeckungswahrscheinlichkeit wie bei der Normalverteilung zu erhalten, ist diese Standardabweichung mit dem Student-Faktor nach Tab. 1 für  $n_f = 5 - 1 = 4$  zu multiplizieren. Der Student-Faktor beträgt  $t(4) = 1,14$ .

Die Halbbreite des Messunsicherheitseinflusses ist somit  $a_i = 0,002 \text{ m} \cdot 1,14$  mit  $G_i = 1$  (Typ A).

Der Sensitivitätskoeffizient  $c_i$  ergibt sich zu

$$c_i = \frac{\delta y}{\delta i} = 1,$$

die Standardunsicherheit  $u(i)$

$$u(i) = \sqrt{G_i} \cdot a_i \cdot 1,14 = \pm 0,0023 \text{ m}$$

und die Standardunsicherheit  $u_i(y)$

$$u_i(y) = |c_i| \cdot u(i) = \pm 0,0023 \text{ m}.$$

#### Einflussgröße Reflektorhöhe $\delta_r$ :

Für die Reflektorhöhe gelten die zuvor bei der Instrumentenhöhe gemachten Aussagen. Die Standardunsicherheit ist also

$$u_r(y) = \pm 0,0023 \text{ m}.$$

*Einflussgröße Refraktionskoeffizient  $\delta_{kr}$* 

Der Refraktionskoeffizient  $k_r = 0,13$ , der heutzutage in den Lehrbüchern als eingeführt gelten kann, beruht auf der Annahme, dass die Luftschichtungen parallel verlaufen, der Gradient des Brechungsindex über den gesamten Strahlverlauf gleich ist und der Radius der Bahnkurve 8-mal größer ist als der Erdradius. Der eingeführte Wert  $k_r = 0,13$  repräsentiert den Mittelwert unterschiedlicher Untersuchungen (vielfach im Gebirge durchgeführt). Es stellt sich aber die Frage, in welcher Größenordnung dieser Koeffizient in Abhängigkeit von den örtlichen Verhältnissen variiert. Während die Refraktionskoeffizienten  $k_r$  im Flachland in den unteren Luftschichten z. B. nach /Hirt u. a. 2019/ bis zu +14,0 Einheiten zum Teil sehr stark von dem eingeführten Wert abweichen können (um das 100-fache), ergaben Untersuchungen im Gebirge, auf die sich /Finsterwalder & Hofmann 1955, S. 27/ beziehen, Refraktionskoeffizienten zwischen  $k_r = 0,20$  und  $k_r = 0,10$ .

Da beim Zahlenbeispiel die Messungen im Gebirge stattfanden, wird aufgrund der angeführten Untersuchungsergebnisse angenommen, dass der Refraktionskoeffizient  $k_r$  unter den zum Zeitpunkt der Messungen herrschenden, guten Witterungsbedingungen eine maximale Variationsbreite von  $\pm 0,05$  Einheiten aufweisen kann. Weil Informationen über die Verteilung dieser Variation nicht vorliegen, wird von einer Rechteck-Verteilung ausgegangen. Die Halbbreite der Einflussgröße  $\delta_{kr}$  (Refraktionskoeffizient) beträgt demnach  $a_{kr} = 0,05$  mit  $G_{kr} = \frac{1}{3}$  (Typ B).

Der Sensitivitätskoeffizient  $c_{kr}$  ergibt sich zu

$$c_{kr} = \frac{\delta y}{\delta k_r} = -\frac{d^2}{2r} = -0,5077 \text{ m,}$$

die Standardunsicherheit  $u(k_r)$

$$u(k_r) = \sqrt{G_{kr}} \cdot a_{kr} = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = \pm 0,028868$$

und die Standardunsicherheit  $u_{kr}(y)$

$$u_{kr}(y) = |c_{kr}| \cdot u(k_r) = \pm 0,0147 \text{ m.}$$

*Einflussgröße Additionskonstante  $\delta_{ka}$* 

Die Additionskonstante wurde im Rahmen einer Kalibrierung auf einer Vergleichsstrecke bestimmt. Im Kalibrierzertifikat wird angegeben, dass die Additionskonstante mit der Messunsicherheit nach GUM von  $\pm 0,001 \text{ m}$  ( $k = 2$ ) bestimmt worden ist. Hierbei ist  $k = 2$  der Erweiterungsfaktor bei der Messunsicherheit (siehe Abschnitt 3.3.3). Die Halbbreite der Einflussgröße  $\delta_{ka}$  ist  $a_{ka} = \frac{0,001 \text{ m}}{2} = 0,0005 \text{ m}$  mit  $G_{ka} = 1$  vom Typ A (Normalverteilung).

Der Sensitivitätskoeffizient  $c_{ka}$  ergibt sich zu

$$c_{ka} = \frac{\delta y}{\delta k_a} = \cos(z) = 0,5260,$$

die Standardunsicherheit  $u(k_a)$

$$u(k_a) = \sqrt{G_{ka}} \cdot a_{ka} = \pm 0,0005 \text{ m}$$

und die Standardunsicherheit  $u_{ka}(y)$

$$u_{ka}(y) = |c_{ka}| \cdot u(k_a) = \pm 0,0003 \text{ m.}$$

*Einflussgröße atmosphärische Korrektur  $\delta_{km}$* 

Die Parameter zur Berechnung der atmosphärischen Korrektur für die Distanzmessung wurden punktuell jeweils auf den Endpunkten der Visurlinie gemessen. Es ist zu beurteilen, wie repräsentativ diese Werte für die gesamte Strecke sind. Aufgrund der recht günstigen Witterungsbedingungen wird angenommen, dass die atmosphärische Korrektur auf jeden Fall auf  $\pm 2 \text{ ppm}$ , also für die Distanz  $d = 2545,139 \text{ m}$  auf  $\pm 0,0051 \text{ m}$ , ermittelt werden konnte. Informationen zur Verteilung dieses Werts liegen wieder nicht vor, sodass von einer Rechteck-Verteilung ausgegangen wird. Die Halbbreite der Einflussgröße  $\delta_{km}$  ist  $a_{km} = 0,0051 \text{ m}$  mit

$$G_{km} = \frac{1}{3} \text{ vom Typ B.}$$

Der Sensitivitätskoeffizient  $c_{km}$  ergibt sich zu

$$c_{km} = \frac{\delta y}{\delta k_m} = \cos(z) = 0,5260,$$

die Standardunsicherheit  $u(k_m)$

$$u(k_m) = \sqrt{G_{km}} \cdot a_{km} = \frac{0,0051 \text{ m}}{\sqrt{3}} = \pm 0,0029 \text{ m}$$

und die Standardunsicherheit  $u_{km}(y)$

$$u_{km}(y) = |c_{km}| \cdot u(k_m) = \pm 0,0015 \text{ m.}$$

*Einflussgröße zyklische Abweichung  $\delta_{kz}$* 

Die zyklische Abweichung wurde nicht durch eine Kalibrierung bestimmt, sodass der Streckenmesswert nicht entsprechend korrigiert werden konnte. Herstellerseitig wird aber zugesichert, dass bei diesem Typ von Präzisionstachymeter die zyklischen Abweichungen  $\pm 2 \text{ mm}$  (Restabweichungen) nicht überschreiten. Da weitere Informationen zur Verteilung dieser Angabe fehlen, wird von einer Rechteck-Verteilung ausgegangen. Die Halbbreite der Einflussgröße  $\delta_{kz}$  ist also  $a_{kz} = 0,002 \text{ m}$  mit  $G_{kz} = \frac{1}{3}$  vom Typ B.

Der Sensitivitätskoeffizient  $c_{kz}$  ergibt sich zu

$$c_{kz} = \frac{\delta y}{\delta k_z} = \cos(z) = 0,5260,$$

die Standardunsicherheit  $u(k_z)$

$$u(k_z) = \sqrt{G_{kz}} \cdot a_{kz} = \frac{0,002 \text{ m}}{\sqrt{3}} = \pm 0,0012 \text{ m}$$

und die Standardunsicherheit  $u_{kz}(y)$

$$u_{kz}(y) = |c_{kz}| \cdot u(k_z) = \pm 0,0006 \text{ m.}$$

*Einflussgröße Geoidundulation  $\delta_{kg}$* 

Bei der trigonometrischen Höhenmessung wird das Quasigeoid nicht so abgetastet wie beim geometrischen Nivellement. Durch Lotstörungen im Normalschnitt der Visurlinie hervorgerufene Undulationen des Quasigeoids können zu systematischen Abweichungen zwischen den Resultaten beider Messverfahren führen. Diese Abweichungen sollten quantifiziert werden, um sie in der Messunsicherheit zu berücksichtigen.

Die Messungen fanden in einem sehr begrenzten räumlichen Bereich von nur einigen wenigen Kilometern Ausdehnung statt.

Es wird davon ausgegangen, dass die Abweichungen verhältnismäßig gering sind. Es wird geschätzt, dass die Abweichungen den Wert von  $\pm 5$  mm nicht überschreiten. Unter Verwendung der Rechteck-Verteilung beträgt die Halbbreite  $a_{kg}$  der Einflussgröße  $\delta_{kg}$   $a_{kg} = 0,005$  m mit  $G_{kg} = \frac{1}{3}$  vom Typ B.

Der Sensitivitätskoeffizient  $c_{kg}$  ergibt sich zu

$$c_{kg} = \frac{\delta y}{\delta k_g} = 1,$$

die Standardunsicherheit  $u(k_g)$

$$u(k_g) = \sqrt{G_{kg}} \cdot a_{kg} = \frac{0,005 \text{ m}}{\sqrt{3}} = \pm 0,0029 \text{ m}$$

und die Standardunsicherheit  $u_{kg}(y)$

$$u_{kg}(y) = |c_{kg}| \cdot u(k_g) = \pm 0,0029 \text{ m}.$$

Mit den einzelnen Standardunsicherheiten  $u_i(y)$  kann jetzt die Messunsicherheit  $u_c(y)$  (als kombinierte Messunsicherheit) für die Höhe des Punkts  $B$  angegeben werden. Es ist nach Gl. (19) mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 1$ :

$$u_{c(k=1)} = 1 \cdot \left[ (u_d(y))^2 + (u_z(y))^2 + (u_i(y))^2 + (u_t(y))^2 + (u_{kr}(y))^2 + (u_{ka}(y))^2 + (u_{km}(y))^2 + (u_{kz}(y))^2 + (u_{kg}(y))^2 \right]^{0,5}$$

$$u_{c(k=1)} = \pm 0,017 \text{ m}.$$

In Tab. 5 sind die Ergebnisse der Budgetanalyse zur besseren Übersicht tabellarisch zusammengestellt<sup>1</sup>.

Der Vollständigkeit halber wird die Messunsicherheit  $u_c(y)$  auch nach den Matrizen der Gl. (23) bestimmt. Für das Rechenbeispiel

ergibt sich in Matrixschreibweise für die Matrix mit den Quadraten der Unsicherheiten:

$$U_{9,9} = \text{diag} (0,0011^2, 0,0068^2, 0,0023^2, 0,0023^2, 0,0147^2, 0,0003^2, 0,0015^2, 0,0006^2, 0,0029^2). \quad (27)$$

Sämtliche Matrizenzelemente abseits der Diagonalen sind null, da die Eingangsgrößen als unkorreliert betrachtet werden. Der Vektor mit den Beträgen der Ableitungen nach den Eingangsgrößen ist

$$f_{1,9}^T = [0,5262, 2164,241, 1, 1, 0,5077, 1, 0,5260, 0,5260]. \quad (28)$$

Aus den Matrizenmultiplikationen nach Gl. (23) wird die Messunsicherheit der zu bestimmenden Größe  $u_c(y) = \pm 0,0169$  m in Übereinstimmung mit den vorherigen Berechnungen ermittelt.

*Punkt 6: Angabe des vollständigen Messergebnisses*

Das vollständige Ergebnis wird wie folgt angegeben:

$$H_B = 2399,918 \text{ m}, u_{c(k=2)} = \pm 0,034 \text{ m}.$$

Die Höhe des Punkts  $B$  wurde in Bezug zum Punkt  $A$  mit der erweiterten Messunsicherheit von  $u_{c(k=2)} = \pm 0,034$  m im DHHN2016-Höhensystem bestimmt. Messunsicherheiten werden mit einem vorangestellten  $\pm$ -Zeichen gekennzeichnet, anders als bei den Standardabweichungen.

Aus dem Messunsicherheitsbudget (vgl. Tab. 5) ist ersichtlich, dass den größten Anteil an der Messunsicherheit  $u_c(y)$  die Einflussgröße „Refraktionskoeffizient“ hat. Den zweitgrößten Anteil hat die Einflussgröße „Zenitwinkel“. Es müsste also versucht werden, diese beiden Größen genauer zu bestimmen, um die Messunsicherheit  $u_c(y)$  zu verkleinern, also um die Höhe des Punkts  $B$  genauer zu erhalten. Aus dem Messunsicherheitsbudget kann man auch

Einflussgröße $\delta$	Schätzwert $S$	Halbbreite $a$	Verteilung	Gewichtung $\sqrt{G}$	Sensitivitätskoeffizient $ c $	Freiheitsgrad $\eta_i$	Standardunsicherheit $u$
$\delta_d$	2545,139 m	0,002 m	Normal	1	0,5262	> 20	0,0011 m
$\delta_z$	64,7412 gon	0,0002 gon	Normal	1	2164,2	> 20	0,0068 m
$\delta_i$	1,45 m	0,002 m	Student	1	1	4	0,0023 m
$\delta_t$	1,82 m	0,002 m	Student	1	1	4	0,0023 m
$\delta_{kr}$	0,13	0,05	Rechteck	$1/\sqrt{3}$	0,5077	$\infty$	0,0147 m
$\delta_{ka}$	0,010 m	0,0005 m	Normal	1	1	> 20	0,0003 m
$\delta_{km}$	0,025 m	0,0051 m	Rechteck	$1/\sqrt{3}$	0,5260	$\infty$	0,0015 m
$\delta_{kz}$	0,002 m	0,002 m	Rechteck	$1/\sqrt{3}$	0,5260	$\infty$	0,0006 m
$\delta_{kg}$	0,005 m	0,005 m	Rechteck	$1/\sqrt{3}$	1	$\infty$	0,0029 m
$u_{c(k=1)}$	<b>2399,9180 m</b>						<b>0,017 m</b>
$u_{c(k=2)}$	<b>2399,9180 m</b>						<b>0,034 m</b>

Tab. 5 | Zusammenstellung der Mittelwerte der Messgrößen bzw. weiterer Parameter

<sup>1</sup> Vollständigerweise hätte noch die Maßstabskorrektur bedingt durch eine Abweichung von der Soll-Frequenz des Distanzmessers berücksichtigt werden müssen. Da aber das Zahlenbeispiel nur der Demonstration der GUM-Methode dient, wurde darauf verzichtet.

ablesen, bei welchen Einflussgrößen eine Steigerung der Genauigkeit nicht effizient wäre.

Die im Zahlenbeispiel verwendeten Ansätze stellen nur eine Variante der Messunsicherheitsanalyse dar. Es ist vorstellbar, dass andere Bearbeiter andere, ebenso vertretbare Ansätze gewählt hätten. Letztlich wird aber durch die ausführliche Dokumentation der verwendeten Prinzipien und Annahmen volle Transparenz hergestellt.

## LITERATUR

**DIN 1319-1:1995-01** Grundlagen der Messtechnik – Teil 1: Grundbegriffe. Beuth, Berlin.

**DIN 55350-13:1987-07** Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik; Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnissen. Beuth, Berlin.

**DIN V ENV 13005:1999-06** Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen. ENV 13005. Beuth, Berlin (Vornorm wurde zurückgezogen).

**DIN V ENV 13005 Beiblatt 1: (Vornorm-Entwurf)** Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen – Beiblatt 1: Fortpflanzung von Verteilungen unter Verwendung einer Monte-Carlo-Methode, deutsche Übersetzung des GUM S1, 2010. Beuth, Berlin.

**Finsterwalde, R.; Hofmann, W. (1955):** Studien zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge. Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Neue Folge, Heft 70, München.

**Fuchs, M. (2013):** Untersuchung des zyklischen Fehlers eines Leica TCA 1800 im Messlabor und im Feld. Masterarbeit an der TU Graz. <https://diglib.tugraz.at/download.php?id=576a7227cfb1b&location=browse>.

**Heister, H. (2001):** Zur Angabe der Messunsicherheit in der geodätischen Messtechnik. In: Schriftenreihe des DVW e.V., Heft 42, Wittwer, Stuttgart, 108–119.

**Heister, H. (2005):** Zur Messunsicherheit im Vermessungswesen. In: Géomatique Suisse (2005), Teil 1: 604–607, Teil 2: 670–673.

**Hennes, M. (2007):** Konkurrierende Genauigkeitsmaße – Potential und Schwächen aus der Sicht des Anwenders. In: Allgemeine Vermessungsnachrichten 114(2007)4, 136–146.

**Hirt, Chr.; Guillaume, S.; Wisbar, A.; Bürki, B.; Sternberg, H. (2010):** Monitoring of the refraction coefficient in the lower atmosphere using a controlled setup of simultaneous reciprocal vertical angle measurements. In: Journal of Geophysical Research 115(2010) D21102. DOI:10.1029/2010JD014067.

**Höpcke, W. (1980):** Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. W. de Gruyter, Berlin/New York.

**ISO/IEC Guide 98-3:2008-09:** Messunsicherheit – Teil 3: Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen. Beuth, Berlin.

**ISO 17123-1 (2014):** Optics and optical instruments – Field procedures for testing geodetic and surveying instruments – Part 1: Theory (ISO 17123-1:2014).

**JCGM (100:2008):** Evaluation of measurement data – An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents. Auswertung von Messdaten – Eine Einführung zum „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ und zu den dazugehörigen Dokumenten. [https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM\\_100\\_2008\\_E.pdf](https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf) (26.11.2019).

**JCGM (104:2009):** Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 100, 2008; [https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung\\_8/8.4\\_mathematische\\_modellierung/8.40/JCGM\\_104\\_2009\\_DE\\_2011-03-30.pdf](https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_8/8.4_mathematische_modellierung/8.40/JCGM_104_2009_DE_2011-03-30.pdf) (04.10.2019).

**Kreyszig, W. (1974):** Statistische Methoden und ihre Anwendungen. 4. Aufl. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

**Kuhlmann, H.; Hesse, Chr.; Holst, Chr. (2017):** Standardabweichung vs. Toleranz. DVW-Merkblatt 12-2017, Herausgeber: DVW e.V. Vogtsburg. [https://www.dvw.de/sites/default/files/merkblatt/daten/2017/12\\_DVW-Merkblatt\\_Stdabw\\_Toleranz.pdf](https://www.dvw.de/sites/default/files/merkblatt/daten/2017/12_DVW-Merkblatt_Stdabw_Toleranz.pdf).

**Lang, M. (2001):** Die Bestimmung von Messunsicherheiten an praktischen Beispielen. In: Schriftenreihe des DVW e.V., Heft 42, Wittwer, Stuttgart, 138–150.

**Neumann, I. (2012):** Messunsicherheit bei elektrooptisch bestimmten Strecken. In: allgemeine vermessungsnachrichten 119(2012)11-12, 369–379.

**Niemeier, W. (2002):** Ausgleichsrechnung. W. de Gruyter, Berlin/New York.

**Niemeier, W.; Tengen, D. (2017):** Uncertainty assessment in geodetic network adjustment by combining GUM and Monte-Carlo-simulations. In: Journal of Applied Geodesy 11(2017)2, 67–76.

**N. N. (2019):** GUM (Norm). [https://de.wikipedia.org/wiki/GUM\\_\(Norm\)](https://de.wikipedia.org/wiki/GUM_(Norm)) (04.10.2019).

**Pesch, B. (2010):** Messunsicherheit – Basiswissen für Einsteiger und Anwender. Books On Demand, Zülrich.

**Pesch, B. (2017):** Persönliche Mitteilungen zur Verwendung des GUM.

**Schwarz, W. (Hrsg.) (1995):** Vermessungsverfahren im Maschinen- und Anlagenbau. Wittwer, Stuttgart.

**Schwarz, W. (2004):** Genauigkeitsmaße richtig interpretieren. In: Beiträge zum 61. DVW-Fortbildungsseminar „Interdisziplinäre Messaufgaben im Bauwesen“ am 27. und 28. September 2004 an der Bauhaus-Universität Weimar. Schriftenreihe des DVW e.V., Band 46, Wißner, Augsburg, 77–96.

**Witte, B.; Spalla, P. (2015):** Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen. 8. Aufl. Wichmann, Berlin/Offenbach.

**Woyand, H.-B. (2017):** Python für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Einführung in die Programmierung, mathematische Anwendungen und Visualisierungen. Hanser, München.

## Hinweis

Der Beitrag wird fortgesetzt. Im nachfolgenden avn-Heft wird im Teil 2 des Beitrags im Abschnitt 3.4 gezeigt, wie Messunsicherheitsbestimmungen auch nach der Monte-Carlo-Methode vorgenommen werden können. Hierbei werden nach dem mit dem GUM-Supplement 1 (DIN V ENV 13005 Beiblatt 1 (Vornorm-Entwurf)) im Jahr 2008 eingeführten GUM-Verfahren Wahrscheinlichkeits-Verteilungen auf die Zielgrößen fortgepflanzt. Im Abschnitt 3.5 wird dann weiterhin gezeigt, wie auch Messunsicherheitsbestimmungen bei Ausgleichsrechnungen nach der Monte-Carlo-Methode durchgeführt werden können.

**Prof. Dr.-Ing. Willfried Schwarz**

Malerstieg 12 | 99425 Weimar  
willfried.schwarz@gmx.net

